

Die Allgemeine Relativitätstheorie als $SO(3)$ -Eichtheorie

Von der Fakultät Physik der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von Michael Mattes aus Stuttgart

Hauptberichter: Prof. Dr. Dr. h.c. W.Weidlich

Mitberichter: Prof. Dr. H.R.Trebin

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Juli 1990

Institut für theoretische Physik der Universität Stuttgart

1990

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	1
1 Erfolge und Probleme der Allgemeinen Relativitätstheorie	3
1.1 Kurzer, historischer Rückblick	4
1.2 Problematische Aspekte der Einsteinschen Theorie	6
1.3 Die Allgemeine Relativitätstheorie als $SO(3)$ -Eichtheorie	11
2 Die Reduktion des $GL(4, \mathbb{R})$-Bündels	17
III Die Geometrie der $(1+3)$ Zerlegung	31
III.1 Die charakteristische Konnexion	32
Die innere Krümmung des charakteristischen Bündels	37
III.3 Die Torsion	41
III.4 Die Krümmung	46
IV Das klassische Vakuum	52
IV.1 Teleparallelismus und Vakuum	54
IV.2 Parallelisierbare Räume	61
IV.3 Euklidische Foliation	63
IV.4 Die Vakuumenergie	68
IV.5 Vakuum-Anregungen	74

IV.6 Die Konstruktion der Riemannschen Krümmung	79
V Vakuum-Dynamik und Spin-Kompensation	84
V.1 Das Spin-Problem in der Einsteinschen Theorie	85
V.2 Das Kompensationsfeld	92
V.3 Die mikroskopische Dynamik	94
V.4 Der Energie-Impuls des Vakuums	96
V.5 Das Eichfeld	101
V.6 Die geometrische Struktur des Vakuums	104
VI Riemannsche Struktur von trivialisierbaren Eichfeldern	108
VI.1 Das inverse Problem und trivialisierbare $SO(3)$ Eichfelder	109
VI.2 Konstruktion des charakteristischen Bündels	112
VI.2.1 Trivialisierbarkeit und Torsion	112
VI.2.2 Die Bündel-Konnexion	115
VI.2.3 Die Bündelkrümmung	118
VI.2.4 Die Fasermetric	120
VI.3 Der Bündelisomorphismus	123
VI.3.1 Die Bündelabbildung	123
VI.3.2 Extrinsische und intrinsische Krümmung	124
VI.3.3 Verallgemeinerte Konformalität	128
VI.4 Integrabilität und Torsion	130
VI.4.1 Die Frobenius Bedingung	131
VI.4.2 Übergang zu einer Riemannschen Struktur	134
VI.5 Die Yang-Mills Gleichungen	138
VI.5.1 Die geometrische Bedeutung der Feldgleichungen	139
VI.5.2 Die Riemann-Yang-Mills Struktur	142
VI.6 Geodätische und autoparallele Kurven	145

VII Die Expansion des leeren Universum	151
Glossar	165
A Nachbemerkung	172
Literaturverzeichnis	174

Abbildungsverzeichnis

VI.1 Charakteristische Flächen der Dimeron-Lösung	145
VI.2 Das Dimeron-Potential	150
VI.3 Newtonsche Geodäten	150
VI.4 Autoparallele Trajektorien	152
VII.1 Der Radius $\mathcal{R}(t)$ des deSitter Universums für $\sigma = 0$	163

Kurzfassung

Die Einsteinsche Theorie der Gravitation („Allgemeine Relativitätstheorie“) beruht auf der Annahme, daß die geometrischen Eigenschaften des vierdimensionalen Raumzeit-Kontinuums im wesentlichen von der darin befindlichen Materie bestimmt werden. Im Gegensatz hierzu mißt die Newtonsche Mechanik dem Raum und der Zeit eine absolute, materieunabhängige Bedeutung bei. Die vorliegende Arbeit stellt einen Kompromiß zwischen diesen beiden Vorstellungen dar: Es wird zwar einerseits die spontane Aufspaltung der Raum-Zeit in eine „universale Zeit“ und einen „absoluten Raum“ im Sinne Newtons akzeptiert, andererseits aber erhält diese (1+3)-Aufspaltung den Status eines dynamischen Objektes im Sinne Einsteins.

Hierbei wird die (großräumige) Eigendynamik der (1+3)-Zerlegung nur schwach an die (lokalen) Schwankungen der Materiedichte mit Hilfe der Einstein-Gleichungen angekoppelt, sodaß diese nach wie vor ihre Gültigkeit für die Gravitationsphänomene in einem begrenzten Raumbereich behalten (Planeten, Sterne Galaxien). Auf einer kosmischen Skala jedoch werden die Eigenschaften des Universums als Ganzes im wesentlichen von der Eigendynamik der Raumzeit-Aufspaltung bestimmt.

Die Geometrie der (1+3)-Zerlegung und die Expansion des leeren Universums werden im Detail untersucht. Die neue Gravitationstheorie enthält im Vergleich zur Einsteinschen Theorie einen zusätzlichen Feldfreiheitsgrad, der als Träger für den Energie-Impuls-Inhalt der Gravitationswechselwirkung in Frage kommt. Der „Grundzustand“ des leeren Universums (\rightsquigarrow maximale Symmetrie) wird durch eine

de Sitter-Geometrie beschrieben, wobei sich nur das *expandierende* Universum als stabil erweist. Ein Teil der vorliegenden Doktorarbeit (Kap.V) wurde bei der Zeitschrift für Naturforschung zur Veröffentlichung eingereicht.[33]

Kapitel 1

Erfolge und Probleme der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die populärwissenschaftliche Literatur reagiert bekanntlich mit einiger Verzögerung auf die neuen bahnbrechenden Erkenntnisse, die von den akademischen Spezialisten in ihren Labors und Denkhallen an den universitären Forschungseinrichtungen erarbeitet werden. Diesem Retardierungseffekt kann man sicherlich auch einige positive Seiten abgewinnen wenn man bedenkt, daß so manche „wissenschaftliche Revolution“ wieder zerplatzt, bevor sie überhaupt ans Licht der Öffentlichkeit gelangt (und so dem Ansehen ihres Schöpfers Schaden zufügen könnte). Gerade wegen dieser Selektionseigenschaft können aber die Reaktionen in der populärwissenschaftlichen Presse manchmal einen durchaus seriösen Hinweis darauf abgeben, daß die normalerweise nur für Eingeweihte zugängliche Forschungsfront wieder einmal in Bewegung gekommen ist.

Diese Annahme scheint umso mehr berechtigt, wenn sich auch noch die eigentlichen Köpfe darum bemühen, die neuesten Forschungsergebnisse ihres engeren Fachgebietes unter die Leute zu bringen. Die gegenwärtige Welle von populärwissenschaftlichen Darstellungen der Relativitätstheorie, die von renommierten theoretischen Physikern

verfaßt werden (z.B. [1]-[7]), deutet jedenfalls daraufhin, daß 70 Jahre nach der ersten Formulierung dieser Theorie durch Einstein eine aufsehenerregende Neuentwicklung eingetreten sein muß. Was sind die Ursachen für diese Renaissance der (Allgemeinen) Relativitätstheorie?

1.1 Kurzer, historischer Rückblick

Um diese Frage zu beantworten, muß man nochmals in die Anfangsphase der Allgemeinen Relativitätstheorie zurückgehen. Sofort nach Aufstellung seiner Gravitationstheorie im Jahr 1915 hat Einstein selbst diese einem ersten „Härtetest“ unterzogen, indem er mit ihrer Hilfe die Periheldrehung der Merkurbahn (43 Bogensekunden pro Jahrhundert) für das damalige Verständnis „richtig“ erklärte. Damit schien zunächst einmal der Siegeszug der Allgemeinen Relativitätstheorie gesichert zu sein. Paradoxerweise ist vom heutigen Standpunkt aus gesehen gerade dieser erste Erfolg der Einsteinschen Theorie höchst zweifelhaft, da Einstein bei seiner Berechnung der Periheldrehung von einer exakten Kugelgestalt der Sonne ausging, während man heutzutage weiß, daß aufgrund der inhomogenen Rotation der Sonne ein Quadrupolmoment auftritt, welches Periheldrehungen in der Größenordnung der allgemein-relativistischen Korrektur bewirkt (Dicke und Goldenberg). Als Folge davon scheint heute niemand so richtig zu verstehen, warum die Vorhersagen der Einsteinschen Theorie so gut mit dem beobachteten Wert übereinstimmen.

Zunächst aber kam noch ein weiterer glücklicher Umstand der Relativitätstheorie in ihrer frühen Phase zu Hilfe: die totale Sonnenfinsternis von 1919. Es wurden zwei Expeditionen (Eddington) zur Beobachtung der Ablenkung des Sternenlichtes durch die verfinsterte Sonne durchgeführt, welche die Einsteinschen Vorausagen bis auf eine Genauigkeit von 20% (bzw. 7%) bestätigten. Dies wurde als eine hinreichende Verifizierung der Einsteinschen Theorie akzeptiert, vor allem auch

deshalb, weil die damalige Experimentiertechnik einen größeren Genauigkeitsgrad nicht zuließ. Mit dieser etwas dürftigen experimentellen „Untermauerung“ hat die Allgemeine Relativitätstheorie eine 40-jährige Stagnationsphase überstanden, wobei die weitere *theoretische* Durcharbeitung eine gewisse Überlebenshilfe geboten hat (Wheeler, Chandrasekhar, Schild, Zel’dovich).

Allerdings erfolgte nun aber in den 60er Jahren eine intensive Wiederbelebung der Relativitätstheorie sowohl von der theoretischen wie auch der experimentellen Seite her. Der Beitrag der Theoretiker bestand einerseits in der Aufstellung einer Konkurrenz-Theorie (Skalar-Tensor-Theorie von Brans und Dicke), andererseits in der Anwendung neuer Rechenmethoden (Penrose) und der Aufdeckung wichtiger theoretischer Phänomene der Theorie (Hawking, Thorne, Novikov, Bardeen). Aber auch die Experimentalphysiker konnten mit aufsehenerregenden Entdeckungen aufwarten: Pulsare, Quasare, Hintergrund-Strahlung, Gravitationslinsen, relativistische Doppelstern-Systeme. Darüberhinaus hatten sich die experimentellen Methoden so verfeinert, daß man nicht mehr auf bloße Beobachtung der allgemein-relativistischen Effekte auf einer kosmologischen Skala angewiesen war, sondern auch Experimente innerhalb des planetaren Maßstabs durchführen konnte. So wurde z.B. die Gravitations-Rotverschiebung nachgewiesen mit Hilfe eines Raketenexperimentes (Vessot), durch Erdumrundung an Bord eines Passagierflugzeuges (Hafele und Keating) und schließlich sogar innerhalb eines Gebäudes (Jefferson-Turm der Harvard-University, Pound-Rebka-Snyder). Ferner wurde ein Doppelstern-Pulsar entdeckt (Hulse und Taylor), der aufgrund seiner günstigen Systemparameter die allgemein-relativistischen Effekte im Sinne Einsteins wie aus dem Bilderbuch produziert (z.B. ist hier die Periastron-Drehung 36000 mal so groß wie bei der Merkur-Bahn; Bahnradius \approx Sonnenradius, Bahnperiode 7,75 h, Pulsperiode 0,059 sec).

Auf dem Hintergrund dieser erdrückenden Beweislast gegen die Konkurrenten der Allgemeinen Relativitätstheorie und zugunsten der Einsteinschen Ideen mag

die in jüngster Zeit beobachtbare Euphorie der Relativitätstheoretiker verständlich erscheinen. Man sollte darüber aber nicht vergessen, daß die logisch-konzeptionelle Geschlossenheit der Einsteinschen Theorie keineswegs so einstimmig akzeptiert wird wie ihre experimentellen Erfolge. Die Uneinigkeit in der theoretischen Bewertung der Einsteinschen Theorie wird allein schon an ihrer unterschiedlichen Benennung durch verschiedene Autoren deutlich: „Chronogeometry“ (Fock, Fokker), „geochronometrical gravity“ (Treder), „geometroynamics“ (Wheeler), „gravodynamics“ (deWitt, Ivanenko), „gravitodynamics“ (Mercier). Abgesehen von diesen äußerlichen Meinungsverschiedenheiten, gibt es auch inhaltliche Differenzen: Hatte Einstein noch durch seine Namensgebung „Allgemeine Relativitätstheorie“ zum Ausdruck bringen wollen, daß es sich hier um eine Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips seiner Speziellen Theorie handeln soll, so bestreiten z.B. Fock und Fokker, daß die Allgemeine Theorie (im Gegensatz zur Speziellen) überhaupt ein Relativitäts-Prinzip enthält. Die in Einsteins Theorie vorhandene Kovarianz wird von manchen Autoren als eine glatte Trivialität angesehen (Kretschmann, Havas).

In der vorliegenden Arbeit wird von der bestehenden Kritik an der Einsteinschen Theorie ausgegangen und versucht eine Lösung für gewisse Schwachpunkte der Allgemeinen Relativitätstheorie zu finden. Diese unbefriedigenden und verbesserungswürdigen Aspekte sollen zunächst einmal präzisiert werden.

1.2 Problematische Aspekte der Einsteinschen Theorie

1.

Das hervorstechende Merkmal der Allgemeinen Relativitätstheorie ist sicherlich die Eigenschaft der allgemeinen Kovarianz. Als Folge dieser Eigenschaft verlieren die Koordinaten der Raum-Zeit ihre unmittelbare physikalische Bedeutung, die sie

in der Speziellen Theorie noch besitzen (globale Inertialsysteme). An die Stelle der globalen Inertialsysteme tritt in der Allgemeinen Theorie der Begriff des *Bezugssystems* (reference frame), ohne den weder die theoretische Seite (Spinoren, etc.) noch die experimentelle Seite (Verifikation) auskommen kann. Anschaulich gesehen kann man sich ein Bezugssystem als ein Tetradenfeld über der Raum-Zeit vorstellen, das nur bis auf eine $SO(3)$ -Umeichung eindeutig bestimmbar ist. Der zeitartige Tetradenvektor ist dabei ein $SO(3)$ -Skalar und definiert eine 3-dimensionale raumartige Distribution, die im Falle ihrer Integrabilität zu einer $(1+3)$ -Foliation der 4-dimensionalen Raum-Zeit führt. Für die konkrete Bearbeitung der allermeisten relativistischen Probleme ist die *Wahl* einer solchen Foliation unvermeidbar [26]! Auf diese Weise erhält — trotz der allgemeinen Kovarianz — die Wahl eines Bezugssystems eine so wichtige Bedeutung, daß wir uns versucht fühlen werden, die $(1+3)$ -Foliation von ihrem untergeordneten Status einer rechentechnischen Hilfsgröße zu befreien und zu einem ordentlichen, dynamischen Objekt der Theorie zu machen. Obwohl dies die Bevorzugung eines bestimmten Bezugssystems bedeutet, muß es nicht unbedingt die Verletzung der allgemeinen Kovarianz der Theorie nach sich ziehen (siehe später). Ein solches Vorgehen würde lediglich zur Folge haben, daß die Zahl der (kovarianten!) Variablen der Gravitationstheorie um diejenigen vergrößert wird, welche die $(1+3)$ -Foliation beschreiben (\rightsquigarrow „Ätherfelder“ und $SO(3)$ -Eichfeld).

2.

Eng verwandt mit der Problematik der Bezugssysteme ist das *Äquivalenzprinzip*. Entsprechend diesem Prinzip muß es möglich sein, für jeden Punkt der Raum-Zeit ein (lokales) Bezugssystem einzurichten, bezüglich dem die physikalischen Gesetze ihre speziell-relativistische Form annehmen. Dadurch wird die Gravitationskraft zu einer Scheinkraft degradiert, die durch Übergang zu einem geeigneten Bezugssystem (lokal) wegtransformiert werden kann. Dies erzeugt nun aber für die Theorie ein gewisses Problem, denn wenn die Gravitationskraft lokal zum Verschwinden gebracht werden kann, dann gilt dies sicher auch für ihren Energie/Impulsinhalt, falls man sich diesen aus der Metrik und ihren ersten kovarianten Ableitungen aufgebaut denken darf. Man könnte darauf antworten, daß das Äquivalenzprinzip gar nicht für alle physikalischen Gesetze gilt, da manche Beziehungen (z.B. die Einstein-Gleichungen) überhaupt kein speziell-relativistisches Analogon haben. Diese Art der Argumentation hat dazu geführt, eine „schwache“ Form des Äquivalenzprinzips einzuführen, die nur für Gesetze der ersten Differentiations-Ordnung gelten soll, also z.B. nicht für die Einstein-Gleichungen, die zweite Ableitungen der Metrik enthalten. Dem muß aber entgegengehalten werden, daß der Energie/Impulsinhalt eines Feldes, das einer Bewegungsgleichung zweiter Ordnung genügt, aus den ersten Ableitungen der Feldvariablen aufgebaut sein sollte und demnach auch dem (schwachen) Äquivalenzprinzip genügen sollte; dies führt jedoch im speziellen Fall des metrischen Feldes zu einer Trivialität, denn die ersten kovarianten Ableitungen der Metrik verschwinden identisch und die Verwendung einer nicht-kovarianten Ableitung der Metrik kommt wegen der Kovarianzforderung an den entsprechenden Energie-Impuls-Tensor nicht in Frage.

In diesem Zusammenhang muß nun auf folgenden Sachverhalt hingewiesen werden: Wenn die Gravitation mit anderen Formen der Energie und Materie (z.B. mit einem Gravitationswellen-Detektor) Energie-Impuls nach den üblichen Erhaltungsgesetzen

austauschen kann, dann sollte auf der rechten Seite der Einstein-Gleichungen u.a. auch ein Term erscheinen, der den Energie-Impulsinhalt der Gravitation beschreibt. Dieser Umstand führt sofort zu weitreichenden Folgerungen, von denen wir hier nur eine anführen wollen: Wenn man alle Energie und Materie aus dem Universum entfernt, stehen zur Beschreibung dieses leeren Universums die Einstein-Gleichungen mit dem allein verbleibenden Gravitationsterm auf der rechten Seite zur Verfügung. Für dieses inhomogene Gleichungssystem ist aber eine ganz andere Lösungsmannigfaltigkeit im Vergleich zu den homogenen Einstein-Gleichungen zu erwarten. Es ergibt sich hier die Frage, ob die experimentell feststellbare Expansion des Universums wirklich von der sichtbaren Materiedichte wesentlich beeinflusst wird, wie es das Standardmodell der Kosmologie verlangt, oder ob die Expansion nicht eine Folge der „Vakuum-Dynamik“ des *leeren* Universums ist?

Wir glauben, daß wir zu diesem ungelösten Problem der Einsteinschen Theorie eine neue Lösung anbieten können. Da nämlich das metrische Feld seine fundamentale Bedeutung in unserer Theorie verliert und diese an die neuen Variablen abtritt, welche die $(1+3)$ -Aufspaltung beschreiben, können wir diese neuen Variablen benützen, um für das Gravitationsfeld eine Energie-Impulsdichte zu definieren. Damit kann die Dynamik des leeren Universums unter einem neuen Aspekt untersucht werden.

3.

Das wohl bekannteste Problem der Allgemeinen Relativitätstheorie stellt ihre Quantisierung dar, die man gerne durchgeführt sehen möchte, bevor man eine Vereinheitlichung mit den drei übrigen Grundkräften der Natur vornehmen kann. Vor einer solchen „großen“ Vereinheitlichung sollten alle vier Einzeltheorien in einem einheitlichen formalen System darstellbar sein, d.h. konkret: Jede Einzeltheorie sollte als eine separate konsistente Eichtheorie klassisch und quantentheoretisch formulierbar sein. Paradoxerweise macht hier aber gerade die Gravitation — im

Unterschied zu den drei restlichen Kräften — völlig unerwarteterweise große Schwierigkeiten. Denn während die Eichtheorien für die elektromagnetische, schwache und starke Kraft problemlos in einen einheitlichen *geometrischen* Rahmen (\rightsquigarrow Faserbündeltheorie) gebracht werden können, fügt sich hier ausgerechnet die Allgemeine Relativitätstheorie nicht so ohne weiteres ein, obwohl doch mit ihr der Anspruch verbunden wird, eine *Geometrisierung* der Gravitationskraft zu liefern. Die hierbei auftretenden Schwierigkeiten sollen kurz skizziert werden.

Bei den üblichen Eichtheorien vom Yang-Mills-Higgs Typ kann jedes physikalische Feld eindeutig als geometrisches Objekt in einem Faserbündel über der Raum-Zeit identifiziert werden. So entspricht z.B. dem Eichpotential die Konnexion des Faserbündels, der Eichfeldstärke entspricht die Krümmung und einem Materiefeld entspricht ein Schnitt des entsprechenden Tensorbündels. Durch diese Entsprechung sind alle drei Kategorien von geometrischen Objekten bzw. physikalischen Feldern klar voneinander abgegrenzt. Im Falle der Allgemeinen Relativitätstheorie ist man zunächst versucht die Christoffel-Symbole in analoger Weise mit der Konnexion in einem $\text{Gl}(4, \mathbf{R})$ -Bündel zu identifizieren, da sich eine Koordinatentransformation der Raum-Zeit wie eine $\text{Gl}(4, \mathbf{R})$ -Umeichung ihres Tangentialbündels auswirkt. Diese Identifizierung hätte nun aber zur Folge, daß die Krümmung der Konnexion $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ -wertig ausfällt, was im Widerspruch zum Äquivalenzprinzip steht, welches eine $\mathcal{SO}(1, 3)$ -wertige Krümmung verlangt (d.h. die Krümmung bewirkt eine Lorentz-Transformation). Als Ausweg aus diesem Dilemma muß eine zweites geometrisches Objekt der Konnexion zur Seite gestellt werden, nämlich das metrische Feld, durch dessen kovariante Konstanz die Holonomiegruppe der Konnexion von der ursprünglichen Eichgruppe $\text{Gl}(4, \mathbf{R})$ zur Lorentzgruppe $\text{SO}(1, 3)$ reduziert wird. Dadurch wird aber die Konnexion von der Metrik eindeutig bestimmt, sodaß die Rolle des physikalischen Potentials nun von der Metrik anstelle der Konnexion übernommen wird. Hierdurch wird die Analogie zu den Eichtheorien vom Yang-

Mills-Higgs Typ zerstört und der Eichstatus der Allgemeinen Relativitätstheorie wird wieder zu einem offenen Problem.

Auch zu diesem Problem bietet die vorliegende Arbeit einen Lösungsvorschlag an: es kann gezeigt werden, daß die Allgemeine Relativitätstheorie in der vorliegenden Neuformulierung als eine $SO(3)$ -Eichtheorie aufgefaßt werden kann. Dabei ist die zugrundeliegende $SO(3)$ -Dynamik in einem *flachen* Raum inkonsistent und benötigt zu ihrer Realisierung einen *gekrümmten* Raum. Die Krümmung der Raum-Zeit erscheint also hier nicht wie bei Einstein als physikalisches Postulat sondern als eine mathematische Notwendigkeit.

1.3 Die Allgemeine Relativitätstheorie als $SO(3)$ -Eichtheorie

Die vorliegende Arbeit soll eine Antwort darstellen sowohl auf die Erfolge als auch auf die Probleme der Allgemeinen Relativitätstheorie. Da die erwähnten Erfolge durchweg auf der (zumindest näherungsweisen) Gültigkeit der Einsteinschen Gleichungen beruhen, müssen diese Bewegungsgleichungen auch in der modifizierten Theorie ihre Gültigkeit behalten. Andererseits sollen aber auch die oben erläuterten Schwachpunkte der Einsteinschen Theorie berücksichtigt werden, was bedeutet, daß die Einstein-Gleichungen eine neue Interpretation im Rahmen der modifizierten Theorie erfahren müssen.

Die drei Grundpfeiler der modifizierten Gravitationstheorie sollen kurz dargestellt werden:

α) Allgemeine Struktur der Theorie

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die „Kinematik“ der Gravitation durch

einen neuen Variablensatz beschrieben wird. Die Metrik \mathbf{G} als Tensor zweiter Stufe tritt ihre fundamentale Bedeutung an ihre „mikroskopischen“ Bestandteile (die „Ätherfelder“ \mathbf{B} , \mathbf{p}) ab. Die Ätherfelder sind Vektorfelder über der Raum-Zeit und bilden eine bezüglich der Riemannschen Metrik \mathbf{G} orthonormierte Tetrade \mathcal{E} , deren zeitartiges Mitglied \mathbf{p} („*charakteristischer Vektor*“) die 3-dimensionale „*charakteristische Distribution*“ $\overset{\cap}{\Delta}$ definiert. Diese Distribution induziert ein Ebenenbündel $\overset{\cap}{\tau}_4$ („*charakteristisches Bündel*“) über der Raum-Zeit, dessen 3-dimensionale, innere Geometrie stets vom konstanten Krümmungstyp ist und das zusammen mit dem charakteristischen Vektorfeld \mathbf{p} die 4-dimensionale Geometrie der Raum-Zeit aufbaut. Dabei wirken die raumartigen Ätherfelder \mathbf{B}_i ($i = 1, 2, 3$) als „Verschweißungsformen“ für die Einbettung des zu $\overset{\cap}{\tau}_4$ isomorphen $\text{SO}(3)$ Bündels $\bar{\tau}_4$ („*repräsentatives Bündel*“) in das Tangentialbündel τ_4 der Raum-Zeit.

Die Tetradenfelder \mathbf{B}_i , \mathbf{p} genügen einem $\text{SO}(3)$ -kovarianten System von Bewegungsgleichungen erster Ordnung, das einerseits die Konstanz der Riemannschen Metrik \mathbf{G} gewährleistet und andererseits den Riemannschen Krümmungstensor \mathbf{R} eindeutig festlegt. Die Krümmung der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit ergibt sich hierbei als Integrabilitätsbedingung für die $\text{SO}(3)$ -Ätherdynamik.

Die weiteren Variablen \mathbf{M} der Gravitation gehen in die ersten Ableitungen der Ätherfelder ein und unterteilen sich in zwei Kategorien: die äußeren ($^{(\text{ex})}\mathbf{M}$) und die inneren Variablen ($^{(\text{in})}\mathbf{M}$). Der Riemannsche Krümmungstensor \mathbf{R} ist aus den Ätherfeldern \mathbf{B} , \mathbf{p} , der $\text{SO}(3)$ -Feldstärke \mathbf{F} und den inneren Variablen $^{(\text{in})}\mathbf{M}$ aufgebaut, enthält aber keine äußeren Variablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$. Daher muß — um ein abgeschlossenes System von Bewegungsgleichungen für die Gravitationsvariablen zu erhalten — die Ätherdynamik nur um eine Bewegungsgleichung für das $\text{SO}(3)$ -Eichpotential \mathbf{A} und für die inneren Variablen $^{(\text{in})}\mathbf{M}$ ergänzt werden. Hierbei stellt die Bewegungsgleichung für \mathbf{A} eine *Wahl* der inneren Geometrie des charakteristischen Bündels dar, wobei als einschränkende Bedingung nur die $\text{SO}(3)$ -Bianchi-Identität

für die Eichfeldstärke \mathbf{F} von \mathbf{A} zu berücksichtigen ist. Diese Vorgehen führt zu einem System von Differentialgleichungen erster Ordnung für das Eichpotential \mathbf{A} . Aber auch für die inneren Variablen $^{(\text{in})}\mathbf{M}$ erhält man Bewegungsgleichungen erster Ordnung; und zwar dadurch, daß man für diesen Zweck gerade die Einsteinschen Gleichungen heranzieht, deren neue Bedeutung damit klargelegt ist. Der Einstein-Tensor \mathbf{E} enthält nämlich die inneren Variablen $^{(\text{in})}\mathbf{M}$ höchstens bis zur ersten Differentiationsordnung, sodaß also letzten Endes für den gesamten Variablensatz $\{\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{A}, ^{(\text{in})}\mathbf{M}\}$ der Gravitation (außer $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$, siehe unten) durchweg Bewegungsgleichungen erster Ordnung gelten. Dies scheint uns ein wichtiger Unterschied zur Einsteinschen Theorie zu sein, die ja bekanntlich ein System von Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung für die Metrik \mathbf{G} fordert.

In die gekoppelte Dynamik des Ätherfeldes und des $\text{SO}(3)$ -Eichfeldes geht der Energie/Impuls der Materie nicht direkt ein. Diese Felder bilden demnach ein von der Materie teilweise abgekoppeltes Untersystem, dessen charakteristische Variabilität den „schnellen“ Änderungen der Materiedichte (auf planetarem, stellarem oder sogar galaktischem Maßstab) nicht unbedingt folgen muß; für realistische Lösungen der Bewegungsgleichungen wird man im Newton'schen Sinne für das Äther- und $\text{SO}(3)$ -Untersystem eine typische Variabilität in kosmischen Größenordnungen erwarten (\leadsto Hubble-„Konstante“, siehe Kapitel 2). Demgegenüber stellen die inneren Variablen $^{(\text{in})}\mathbf{M}$ die „schnellen“ Veränderlichen der Theorie dar, die den lokalen Schwankungen der Energie-Dichte der Materie unmittelbar folgen, da sie über die Einstein-Gleichungen ja direkt an die Materie gekoppelt sind. Auch die äußeren Variablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ sind zu den schnellen Variablen zu rechnen. Diese Eigenschaft überträgt sich sowohl auf die 3-Geometrie der charakteristischen Flächen, die von den äußeren Variablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ zusammen mit dem langsamen $\text{SO}(3)$ -Eichfeld \mathbf{A} aufgebaut wird, als auch auf den Energie-Impuls von $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$.

β) Energie-Impuls der Gravitation

Nachdem an die Stelle des metrischen Feldes mehrere andere Variable getreten sind, fallen auch die Schwierigkeiten bei der Definition der Energie-Impulsdichte der Gravitations-Wechselwirkung mit Hilfe der Metrik weg. Es ist klar, daß eine (oder mehrere) der Variablen als Träger der Gravitations-Energie in Frage kommen können. Insbesondere bieten sich hier die äußeren Variablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ an, die zwar nicht unmittelbar in die 4-dimensionale Riemannsche Geometrie der Raum-Zeit eingehen, deren Energie-Impulsinhalt ${}^{(e)}\mathbf{T}$ aber auf der rechten Seite der Einstein-Gleichungen trotzdem die Raum-Zeit-Struktur beeinflussen kann. In der Tat zeigt eine Untersuchung der einfachsten Feldkonfiguration („Grundzustand“ des leeren Universums \rightsquigarrow de Sitter-Raum), daß ein kanonischer Formalismus mit der zugehörigen Definition des Energie-Impuls-Tensors für das gekoppelte Yang-Mills-Higgs-System aus Äther- und Eichfeldern möglich ist. Obwohl hierbei die gesuchte Energie-Impulsdichte formal durch die Äther- und Eichfelder ausgedrückt werden kann, zeigt eine genauere Betrachtung, daß der zugehörige Tensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ genau dann verschwindet, wenn auch die äußeren Variablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ verschwinden, wobei die altbekannte Form der Einstein-Gleichungen zurückgewonnen wird. Dies kann als eine Rechtfertigung dafür angesehen werden, den Energie-Impulsinhalt ${}^{(e)}\mathbf{T}$ den äußeren Variablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ zuzuschreiben, was auch durch die Möglichkeit unterstützt wird, ${}^{(e)}\mathbf{T}$ vollständig durch die äußeren Variablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ auszudrücken. Dabei besteht der äußere Feldfreiheitsgrad der Gravitation in einem $\text{SO}(3)$ Eichvektor $\mathbf{C} = \{C_{i\mu}\}$, den die vorliegende Gravitationstheorie gegenüber der konventionellen Einsteinschen Version *zusätzlich* aufweist. Dies bedeutet, daß der Einsteinschen Gravitation als Spezialfall innerhalb der vorliegenden $\text{SO}(3)$ -Eichtheorie kein Energie-Impulsinhalt zukommt¹

¹Auf die zahllosen Versuche in der Literatur, für die Gravitation innerhalb des Rahmens der

γ) Das Vakuum

Entfernt man alle Materie und Strahlung aus dem Universum, so bleibt der leere Raum zurück, der allerdings eine nicht-triviale Riemannsche Geometrie tragen kann („klassisches Vakuum“). Mit dieser Riemannschen Struktur kann nach den oben gemachten Bemerkungen ein nicht-verschwindender Energie-Impuls verknüpft sein (\rightsquigarrow „Vakuum-Energie“). Abweichend von den ursprünglichen Einsteinschen Vorstellungen nimmt man heute an, daß der Einfluß der Vakuum-Energie auf die Raum-Zeit-Geometrie durch den sogenannten „kosmologischen Term“ beschrieben wird [30]. Die Vakuumenergie selbst wird mit der Nullpunkts-Energie der verschiedenen Quantenfelder identifiziert. Unter allen möglichen Vakuum-Konfigurationen kann man diejenigen mit der größtmöglichen Symmetrie als den „Grundzustand“ des leeren Universums betrachten (\rightsquigarrow de Sitter-Raum)

Mit einiger Befriedigung können wir zu dieser Problematik anmerken, daß sich in unserer $SO(3)$ -Eichtheorie genau dieser Grundzustand mit sehr wenigen Annahmen ergibt. Die zugehörige Vakuum-Energie entspricht gerade dem Energieinhalt der äußeren Variablen $^{(ex)}\mathbf{M}$ in ihrer Vakuum-Konfiguration. Jedoch unterscheiden sich die angeregten Vakuum-Zustände in der vorliegenden Theorie ganz entscheidend von denjenigen der (um den kosmologischen Term erweiterten) Einsteinschen Theorie, da in der letzteren der Vakuum-Tensor stets proportional zur Metrik \mathbf{G} ist. (Proportionalitätsfaktor = „Kosmologische Konstante“). Diese eingeschränkte Gestalt des Vakuum-Tensors ist aber aus der Sicht eines hierarchischen, kosmologischen Modells nicht haltbar, da sich die verschiedenen Teilbereiche des Universums in jeweils unterschiedlichen Entwicklungsphasen bezüglich der Expansion oder Kontraktion befinden könnten und somit die „kosmologische Konstante“ nicht überall im Universum denselben

Einsteinschen Theorie eine Energie-Impulsdichte zu definieren, wird hier nicht eingegangen.

Wert annehmen kann. Andererseits ist eine raumzeitlich variable kosmologische Konstante mit den Einsteinschen Gleichungen nicht verträglich, sodaß aus unserer Sicht das Vakuum-Problem im Rahmen der Einsteinschen Theorie nur eine unbefriedigende Lösung erfährt.

Für die $SO(3)$ -Eichtheorie der Gravitation wird zunächst einmal der Grundzustand des leeren Universums eingehend untersucht. Zur Disposition stehen hier zwei Kandidaten mit unterschiedlich hoher Symmetrie, die aber beide dem „perfekten kosmologischen Prinzip“ genügen: (i) der de Sitter-Raum als eine 4-dimensionale Pseudosphäre $S^4_{(1)}$ im 5-dimensionalen flachen Raum (\rightsquigarrow Unabhängige Symmetrierotationen $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$) und (ii) die pullback-Geometrie einer 3-Kugel $S^3_{(-1)}$ im 4-dimensionalen flachen Raum (\rightsquigarrow Symmetrie-Operationen $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$). Obwohl der $S^3_{(-1)}$ -Kandidat eine sehr enge geometrische Verwandtschaft zum flachen Minkowski-Raum aufweist (er entsteht aus diesem durch Foliation), geben wir doch dem $S^4_{(1)}$ -Kandidaten den Vorzug, weil der zugehörige Vakuum-Tensor aufgrund der hohen Symmetrie proportional zur Metrik \mathbf{G} wird und somit wie ein „kosmologischer“ Term wirkt. Innerhalb dieser Konfiguration gibt es aber immer noch zwei Möglichkeiten, nämlich die Expansion und die Kontraktion des Universums. Durch eine Stabilitätsanalyse kann gezeigt werden, daß nur die Expansion stabil ist, während die kontraktive Phase nach einigen Planck-Zeiten notwendigerweise in einer Singularität endigen muß. Dieses Resultat kann auch als eine Erklärung für die Fixierung der (kosmischen) Zeitrichtung und für die heute zu beobachtende Expansion des Universums betrachtet werden.

Kapitel 2

Die Reduktion des GL(4,R)-Bündels

Einsteins ursprüngliche Version seiner „Allgemeinen Relativitätstheorie“ basiert auf einer Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips der „Speziellen Relativitätstheorie“. Dort wird das physikalische Raum-Zeit Kontinuum als eine 4-Mannigfaltigkeit \mathbf{M}_4 beschrieben, deren triviales Tangentialbündel $\overset{\circ}{\tau}_4$ mit der *Minkowski Metrik* \mathbf{g} und der kanonischen flachen Konnexion $\overset{\circ}{\Gamma}$ ausgestattet ist. Diese besondere Form der Raum-Zeit Geometrie erlaubt die Einführung eines speziellen Bezugssystem \mathcal{E} welches geometrisch gesehen bezüglich $\overset{\circ}{\Gamma}$ einen globalen kovariant konstanten, orthonormalen Schnitt des zu $\overset{\circ}{\tau}_4$ assoziierten Prinzipalbündels $\overset{\circ}{\lambda}_4$, darstellt. Dieses Bezugssystem gewährleistet nun die Existenz einer speziellen Klasse von Koordinatensystemen (*Inertialsysteme*) von \mathbf{M}_4 , deren Basisvektoren (∂_μ) gerade mit den Tetradenvektoren (\mathcal{E}_μ) von \mathcal{E} übereinstimmen:

$$\mathcal{E}_\mu \equiv \partial_\mu = \mathcal{E}^\alpha{}_\mu \partial_\alpha \quad (2.1.a)$$

$$g_{\alpha\beta} \mathcal{E}^\alpha{}_\mu \mathcal{E}^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu} . \quad (2.1.b)$$

Die Bedeutung dieser Raum-Zeit Geometrie für die Physik in \mathbf{M}_4 wird durch das *Relativitätsprinzip* beschrieben, welches besagt, daß die physikalischen Gesetze (Bewegungsgleichungen, Erhaltungsgesetze usw.) forminvariant bezüglich einer (zulässigen) Änderung $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ des globalen Bezugssystem sein müssen:

$$\mathcal{E}'_\mu = \mathcal{E}_\nu \Lambda^\nu{}_\mu . \quad (\text{II.2})$$

Hierbei ist Λ ein Element der (eigentlichen) Lorentzgruppe $\text{SO}(1,3)$, welche aus diesem Grund die fundamentale Symmetriegruppe der speziellen Relativitätstheorie ist.

Trotz des großen Erfolges dieser Theorie, beispielsweise in der Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene, war Einstein nie ganz zufrieden, da er keine Möglichkeit sah, wie die Gravitationswechselwirkung in konsistenter Weise in die spezielle Relativitätstheorie einzufügen wäre. Aus diesem Grund schien es ihm unvermeidbar zu sein, die Theorie durch eine Verallgemeinerung der Symmetriegruppe $\text{SO}(1,3)$ abzuändern. Da alle wichtigen physikalischen Objekte (z.B. 4-Impuls, 4-Kraft, Energie-Impulsdichte usw.) im Tangentialbündel τ_4 der Raum-Zeit (oder dessen assoziierten Bündeln) liegen, wo $\mathcal{GL}^+(4, \mathbf{R})$ als die korrespondierende Strukturgruppe wirkt, ist es naheliegend diese Gruppe als die externe Symmetriegruppe für eine allgemeinere Theorie zu benutzen, welche die Gravitation mitberücksichtigt. Sobald man für die physikalischen Gesetze die neue Symmetriegruppe gewählt hat, ist die Bestimmung der zugrundeliegenden geometrischen Struktur nahezu eindeutig: Die Bedingung (II.2) für äquivalente Bezugssysteme wird dahingehend abgeschwächt, daß das Element Λ nun aus der neuen Strukturgruppe $\text{GL}^+(4, \mathbf{R})$ stammt, was zum verallgemeinerten Relativitätsprinzip führt. Man sieht ferner, daß solch eine Vergrößerung der Symmetriegruppe die Verwendung der oben ausgezeichneten Bezugssysteme verbietet und die Metrik \mathbf{g} (2.1.b) durch ein allgemeineres Objekt $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ ersetzt werden muß, welches einen globalen Schnitt des Quotientenbündels (Strukturgruppe $\text{GL}^+(4, \mathbf{R})/\text{SO}(1,3)$) von \mathbf{R}^1 -wertigen bilinearen, symmetrischen

Abbildungen des Tangentialraumes der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit darstellt:

$$G_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \mathcal{E}^\alpha{}_\mu \mathcal{E}^\beta{}_\nu . \quad (\text{II.3})$$

Die Tetradenkonstituenten \mathcal{E}^α können als ein (nicht notwendigerweise globaler) Schnitt des Tangentialbündels τ_4 der Raum-Zeit betrachtet werden. Der Schnitt \mathbf{G} (II.3) muß natürlich von einer Pseudo-Riemannschen Struktur herrühren, das bedeutet daß \mathbf{G} global durch einen geeigneten Wechsel des Bezugssystems \mathcal{E} in die Minkowski Metrik \mathbf{g} transformiert werden kann, so daß die Relation (2.1.b), aber nicht (2.1.a), gültig bleibt. Dies ist ein etwas heikler Punkt, da nicht jede 4-Mannigfaltigkeit solch eine Pseudo-Riemannsche Struktur zulässt. Eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß die Strukturgruppe $\text{GL}^+(4, \mathbf{R})$ des Tangentialbündels auf ihre Untergruppe $\text{SO}(1,3)$ reduzierbar ist. Mit anderen Worten, das Tangentialbündel τ_4 muß die Errichtung eines Bündelatlasen erlauben, dessen Übergangsfunktionen ausschließlich $\text{SO}(1,3)$ -wertig sind.¹ Diese geometrische Forderung, welche der Raum-Zeit Struktur auferlegt werden muß, ermöglicht physikalisch gesehen gerade das Äquivalenzprinzip (siehe weiter unten).

Nachdem die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit mit der Metrik \mathbf{G} ausgestattet ist, taucht die Frage nach einer $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ -Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ auf, welche die Verallgemeinerung der kanonisch flachen Konnexion $\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}$ darstellt und mit der man die physikalischen (und geometrischen) Objekte differenzieren kann. Es liegt nun kein Grund vor, warum die Metrik \mathbf{G} kovariant konstant bezüglich dem gewählten $\mathbf{\Gamma}$ sein sollte, vielmehr wird man folgende Relation ansetzen:

$$\nabla_\lambda G_{\mu\nu} = -2Q_{\mu\nu\lambda} , \quad (\text{II.4})$$

wobei \mathbf{Q} den bis jetzt noch nicht näher spezifizierten *Nicht-Metrisitätstensor* bezeichnet.

¹Es entstehen keine Probleme, wenn man eine *Riemannsche* Struktur einführen will, da $\text{GL}^+(4, \mathbf{R})$ immer auf ihre maximale kompakte Untergruppe $\text{SO}(4)$ reduzierbar ist.

Lösen wir diese Gleichung nach der Konnexion Γ auf, so ergibt sich

$$\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} = \tilde{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\lambda} + K^\sigma{}_{\nu\lambda} + Q^\sigma{}_{\nu\lambda} , \quad (\text{II.5})$$

wobei die Kontorsion \mathbf{K} ihre Werte in der Lie-Algebra $\mathcal{SO}(1,3)$ der Lorentzgruppe $\text{SO}(1,3)$ annimmt

$$K^\sigma{}_{\nu\lambda} = Z^\sigma{}_{\nu\lambda} - Z_\nu{}^\sigma{}_\lambda + Z_{\lambda\nu}{}^\sigma + Q_\lambda{}^\sigma{}_\nu - Q_{\lambda\nu}{}^\sigma \quad (\text{II.6})$$

und die Torsion \mathbf{Z} von Γ wie gewöhnlich definiert ist als

$$Z^\sigma{}_{\nu\lambda} = \Gamma^\sigma{}_{[\nu\lambda]} . \quad (\text{II.7})$$

Die Kontorsion und die Nicht-Metrität führen somit zu einer schief-symmetrischen Korrektur der Levi-Civita Konnexion $\tilde{\Gamma}$ von \mathbf{G}

$$\tilde{\Gamma}^\sigma{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} G^{\sigma\mu} (\partial_\lambda G_{\mu\nu} + \partial_\nu G_{\mu\lambda} - \partial_\mu G_{\nu\lambda}) . \quad (\text{II.8})$$

Auf diese Weise kommt man zu einer allgemeinen geometrischen Struktur der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit; und es war nun Einsteins geniale Vermutung, daß diese Verallgemeinerungs-Prozedur gerade um einen Schritt zu weit getrieben wurde.

Die gesuchte einschränkende Bedingung für die allgemeine Raum-Zeit Geometrie erhält man durch ein physikalisches Argument, nämlich das *Äquivalenzprinzip*. Laut diesem Prinzip forderte Einstein, daß die Gravitation eine fiktive Kraft ist, welche nur aufgrund eines ungeeigneten Bezugssystems entsteht. Das bedeutet, daß man die Gravitationskraft lokal immer zum Verschwinden bringen kann, vorausgesetzt es wird ein lokales Inertialsystem zugrunde gelegt, in welchem die physikalischen Gesetze ihre speziell-relativistische Form annehmen, wobei dann das spezielle Relativitätsprinzip *lokal* gilt. Aus diesem Grund kann man nun die Menge aller lokalen Inertialsysteme benützen, um ein bis auf eine Lorentztransformation eindeutiges Bezugssystem $\hat{\mathcal{E}}$ zu konstruieren, welches (2.1.b), aber nicht unbedingt (2.1.a), genügt. Man

beachte, daß diese physikalische Forderung mit der geometrischen Bedingung für die Existenz einer Pseudo-Riemannschen Struktur über der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit verträglich ist (vgl. die Diskussion nach Gleichung (II.3)).

Die Philosophie des Äquivalenzprinzips muß nun in eine mathematische Bedingung für die allgemeine Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ (II.5) gebracht werden. Dazu beachte man, daß die physikalischen Größen bezüglich des oben erwähnten Lorentz'schen Bezugssystems $\hat{\mathcal{E}}$ als $SO(1,3)$ Eichobjekte erscheinen, welche mit $\mathbf{\Gamma}$ parallel transportiert werden können und zwar auf eine Weise, welche die lokalen Lorentzinvarianten (z.B. Ruhemasse der Teilchen, Spin usw.) unbeeinflußt läßt und sie deshalb in der gesamten Raum-Zeit als globale Invarianten darstellt. Daraus läßt sich folgern, daß die Endposition eines solchen Objektes, wenn man es entlang einer geschlossenen Kurve parallel transportiert, im Lorentz-Orbit, welcher durch die Startposition geht, enthalten sein muß. Diese Forderung bedeutet, daß die Krümmungs-2-Form \mathbf{R} von $\mathbf{\Gamma}$

$$R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} = \partial_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\rho\lambda} \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \quad (\text{II.9})$$

bezüglich eines holonomen Bezugssystems ihre Werte in der Lie-Algebra $\mathcal{SO}(1,3)$ der Lorentzgruppe annimmt. Das heißt, daß die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ die Lorentzgruppe als Holonomie-Gruppe besitzt. Aus diesem Grund wird nach dem Theorem von Ambrose-Singer [15] die Gruppe $SO(1,3)$ zur Strukturgruppe des Holonomie-Unterbündels des Tangentialbündels τ_4 der Raum-Zeit. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lorentzgruppe die Holonomie-Gruppe der Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ ist, besteht im Verschwinden der Nicht-Metrität \mathbf{Q} (II.4)

$$Q_{\mu\nu\lambda} \equiv 0 . \quad (\text{II.10})$$

Dies kann man leicht durch Betrachtung des symmetrischen Teils der $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ -wertigen Krümmungs 2-Form \mathbf{R} von $\mathbf{\Gamma}$ einsehen:

$$R_{(\mu\nu)\sigma\lambda} = -2Z^\rho{}_{\sigma\lambda} Q_{\mu\nu\rho} + (\nabla_\sigma Q_{\mu\nu\lambda} - \nabla_\lambda Q_{\mu\nu\sigma}) . \quad (\text{II.11})$$

Das Äquivalenzprinzip hat uns somit zu einer *metrischen Theorie der Gravitation* geführt, welche jedoch nicht notwendigerweise zu einer Riemannschen Raum-Zeit führt, wie Einstein ursprünglich vermutete. Der Grund liegt darin, daß wir eine nicht verschwindende Torsion \mathbf{Z} in der Theorie haben. An diesem Punkt gibt es nun zwei verschiedene Möglichkeiten der weiteren Vorgehensweise:

- i) Die Verfechter der Torsionstheorien [13, 14] argumentieren, daß die Torsion \mathbf{Z} von $\mathbf{\Gamma}$ in der Theorie bleiben muß, damit der Spineinfluß der Materie auf die Raum-Zeit, ähnlich wie derjenige der Masse, berücksichtigt werden kann. Das bedeutet, daß die physikalische Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit eine Riemann-Cartan Struktur besitzt. Ein starkes Argument zugunsten dieses Gesichtspunktes ist die Tatsache, daß die Einstein-Gleichungen für eine Riemannsche Raum-Zeit inkonsistent werden, wenn sie auf Materie mit Spin angewendet werden. [13, 14]
- ii) Andererseits kann man auf Einsteins ursprünglicher Version des Äquivalenzprinzips bestehen, welches besagt, daß die Raum-Zeit lokal wie ein Minkowski Raum $\{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}, \mathbf{g}\}$ aussehen soll. Diese Forderung führt jedoch dazu, daß man die Torsion identisch Null setzen muß wie man leicht aufgrund folgender Argumentation sieht: Führen wir die Metrik \mathbf{G} durch ein geeignetes *holonomes* Bezugssystem $\{\partial_\mu\}$ lokal in die Standardform des Minkowski Tensors $\mathbf{g} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ über, dann verschwindet in einer Torsionstheorie die Riemann-Cartan Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ im allgemeinen nicht! Deshalb wird die flache kanonische Konnexion $\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}$ eines Minkowski Raumes nicht einmal *lokal* durch $\mathbf{\Gamma}$ angenähert. Versucht man umgekehrt die Riemann-Cartan Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ durch Übergang zu einem anderen holonomen Bezugssystem $\hat{\mathcal{E}}$

$$\hat{\mathcal{E}}_\alpha = \hat{\mathcal{E}}^\mu{}_\alpha \partial_\mu \quad (\text{II.12})$$

zum Verschwinden zu bringen, was aufgrund des inhomogenen Transformationsgesetzes

für die Konnexion immer möglich ist:

$$\begin{aligned}\omega^\beta_{\alpha\nu} &= \hat{\mathcal{F}}^\beta_{\mu} \partial_\nu \hat{\mathcal{E}}^\mu_{\alpha} + \hat{\mathcal{F}}^\beta_{\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \hat{\mathcal{E}}^\mu_{\alpha} \\ \hat{\mathcal{F}}^\beta_{\mu} \hat{\mathcal{E}}^\mu_{\alpha} &= g^\beta_{\alpha} ,\end{aligned}\tag{II.13}$$

so nimmt die Metrik \mathbf{G} im allgemeinen nicht die Form an, welche man von einer flachen Minkowski Metrik \mathbf{g} erwartet!

Obwohl die Torsionstheorien bis heute eingehend untersucht wurden und anscheinend frei von Inkonsistenzen sind, werden wir jedoch die zweite, oben aufgeführte Möglichkeit untersuchen. Es scheint, als ob das Äquivalenzprinzip nur in einer torsionsfreien Theorie in seinem ursprünglichen Sinn realisiert werden kann. Da aber davon ausgegangen wird, daß der Spin der Materie für das Vorhandensein von Torsion verantwortlich ist, müssen wir einen Mechanismus finden, welcher den Einfluß desselben auf die Raum-Zeit Geometrie verhindert (*Spinkompensation*). Ein solches Kompensationsprinzip ergibt sich zwanglos, wenn man die reduzierte Strukturgruppe $SO(1,3)$ vollends zur gewöhnlichen Rotationsgruppe $SO(3)$ reduziert. Diese Reduktionsprozedur kann man als Hinweis auf eine spontane Symmetriebrechung des Raum-Zeit-Kontinuums verstehen. Einige Autoren hat die vorausgehende Symmetriebrechung $Gl(4, \mathbf{R}) \rightarrow SO(1,3)$ dazu veranlasst das Gravitationsfeld $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ als Higgs-Goldstone Feld aufzufassen [21]. Allerdings ist die reduzierte Strukturgruppe $SO(1,3)$ nicht kompakt. Aus diesem Grund ist eine weitere Reduktion des reduzierten Prinzipalbündels $\hat{\lambda}_4$ immer möglich [25] und zwar so, daß die Strukturgruppe dieses kleinsten Bündels $\bar{\lambda}_4$ gerade identisch der maximalen kompakten Untergruppe $SO(3)$ der Lorentzgruppe ist. Somit zeigt sich, daß die gewöhnliche Rotationsgruppe in drei Dimensionen die kleinstmögliche Strukturgruppe für die Allgemeine Relativitätstheorie ist. Für τ_4 existiert deshalb ein Bündelatlas dessen Übergangsfunktionen $SO(3)$ -wertig sind. Die Holonomie-Gruppe der Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ bleibt jedoch die Lorentzgruppe $SO(1,3)$ wie es das Äquivalenzprinzip vorschreibt.

Wir fassen nun die Reduktion zu $SO(3)$ nicht nur als einen mathematischen Kunstgriff auf, sondern wir nehmen an, daß die physikalische Raum-Zeit tatsächlich einer spontanen Symmetriebrechung unterworfen ist, (unabhängig von der Anwesenheit von Materie).

Dies bedeutet, daß wir als dynamische Variable einen globalen Schnitt \mathbf{p} des Quotientenbündels (Strukturgruppe $SO(1,3)/SO(3)$) verwenden werden, welcher zusammen mit der τ_4 Fasermetric \mathbf{G} die Symmetriebrechung zu $SO(3)$ induziert und dabei einer Bewegungsgleichung genügt, welche die lokale Foliation der Raum-Zeit auf dynamische Weise beschreibt. Die Fasermetric \mathbf{G} aus τ_4 , deren Existenz wir hier voraussetzen (siehe unten), stellt sicher, daß der zeitartige Schnitt \mathbf{p} (*charakteristisches Vektorfeld*) aus τ_4 auf Eins normiert werden kann:

$$G_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \equiv p_\mu p^\mu = +1 . \quad (\text{II.14})$$

Das charakteristische Vektorfeld \mathbf{p} definiert also eine bestimmte 3-Distribution in der Raum-Zeit: die sogenannte *charakteristische Distribution* $\overset{\cap}{\Delta}$. \mathbf{p} und $\overset{\cap}{\Delta}$ definieren nun eine lokale Zerlegung der Raum-Zeit in einen 3-Raum und eine Zeitrichtung, wobei diese (1+3)-Zerlegung aufgrund der Bewegungsgleichung für den charakteristischen Vektor \mathbf{p} als eine dynamische Größe betrachtet werden muß. Um die weiteren dynamischen Variablen zu definieren beachten wir, daß sich die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ durch drei orthonormale Schnitte \mathcal{B}_i ($i,j,k = 1 \dots 3$) von τ_4 aufspannen läßt:

$$\mathcal{B}_{i\mu} \mathcal{B}_j^\mu = g_{ij} \quad (\text{II.15.a})$$

$$\mathcal{B}_{i\mu} p^\mu = 0 , \quad (\text{II.15.b})$$

so daß ihr Quadrat \mathcal{B}^2 senkrecht zu \mathbf{p} projiziert

$$\mathcal{B}_{i\mu} \mathcal{B}^i{}_\nu = \mathcal{B}_{\mu\nu} \quad (\text{II.16.a})$$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}^\nu{}_\lambda = \mathcal{B}_{\mu\lambda} \quad (\text{II.16.b})$$

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} p^\nu = 0 . \quad (\text{II.16.c})$$

Hierbei können wir nun umgekehrt die Riemannsche Metrik \mathbf{G} folgendermaßen aus den $\text{SO}(3)$ Objekten \mathbf{p} , \mathcal{B}_i aufbauen, die wir dann als die eigentlichen dynamischen Variablen der Gravitation ansehen wollen:

$$G_{\mu\nu} = \mathcal{B}_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu . \quad (\text{II.17})$$

Nach dieser Philosophie verliert also die Metrik \mathbf{G} in der neuen Gravitationstheorie ihre fundamentale Bedeutung und erscheint nur noch als ein sekundäres makroskopisches Objekt, welches sich aus den eigentlichen fundamentalen Größen \mathcal{B}_i und \mathbf{p} zusammensetzt, die wir im folgenden als *Ätherfelder* bezeichnen wollen. Die dynamischen Gleichungen für das Gravitationsfeld \mathbf{G} beziehen sich deshalb auf dessen mikroskopische Konstituenten \mathcal{B}_i und \mathbf{p} , wobei die Gleichungen (II.14) bis (II.16.c) Zwangsbedingungen darstellen, welche mit den Bewegungsgleichungen verträglich sein müssen. Eine weitere Einschränkung ist die Metrizitätsbedingung

$$\nabla_\lambda G_{\mu\nu} \equiv 0 , \quad (\text{II.18})$$

welche allein jedoch nicht ausreicht um die rein Riemannsche Natur der Raum-Zeit zu garantieren, wie man aus den obigen Argumenten erkennen kann. Aus diesem Grund muß die mikroskopische Dynamik so aufgebaut sein, daß der Spinkompensationseffekt auftritt. Ein einfaches Beispiel dafür werden wir in Kapitel V kennenlernen.

Abgesehen von dieser letzteren Bedingung kann die allgemeine Form der mikroskopischen Gleichungen leicht angegeben werden. Dazu definieren wir für das raumartige

Ätherfeld \mathcal{B}_i eine (eich- und koordinaten-) kovariante Ableitung \mathcal{D} durch

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} &= \nabla_\mu \mathcal{B}_{i\nu} + \epsilon_i^{jk} A_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} \\ &= D_\mu \mathcal{B}_{i\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \mathcal{B}_{i\lambda} ,\end{aligned}\tag{II.19}$$

wobei $\nabla(\mathbf{D})$ die koordinaten- (eich-) kovariante Ableitung bezeichnet. Die dynamischen Gleichungen für die Ätherfelder haben nun die folgende Form:

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = \mathcal{H}_{i\nu\mu}(\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{M}) \tag{II.20.a}$$

$$\nabla_\mu p_\nu = H_{\nu\mu}(\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{M}) . \tag{II.20.b}$$

Die Objekte \mathcal{H}_i und \mathbf{H} auf der rechten Seite müssen als Funktionen der Ätherfelder und zusätzlicher Feldvariablen \mathbf{M} betrachtet werden, welche mit den Ätherfeldern über eine Gleichung erster Ordnung gekoppelt sind

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{M} = \mathcal{M}_\mu(\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{M}) , \tag{II.21}$$

die selbst wiederum aus den Einsteinschen Gleichungen abzuleiten ist. Dadurch behalten die Einsteinschen Gleichungen nach wie vor ihre Gültigkeit (siehe unten). Den Gleichungen (II.20.a), (II.20.b) und (II.21) müssen wir nun noch einen Ansatz für die $SO(3)$ Feldstärke \mathbf{F}_i hinzufügen

$$F_{i\mu\nu} = \mathcal{F}_{i\mu\nu}(\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{M}) , \tag{II.22}$$

der konsistent ist mit der Bianchi Identität

$$\mathcal{D}_\lambda F_{i\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu F_{i\nu\lambda} + \mathcal{D}_\nu F_{i\lambda\mu} = 0 . \tag{II.23}$$

Die Gleichungen (II.20.a) bis (II.22) stellen nun ein geschlossenes System erster Ordnung dar, welches die mikroskopische Dynamik von gravitierender Materie bestimmt. Im Falle der Abwesenheit von Materie liegt ein Universum vor, dessen Gravitation nur auf sich selbst wirkt. Diesen Fall werden wir in Kapitel IV anhand

eines Beispiels untersuchen. Die Objekte \mathcal{H}_i und \mathbf{H} müssen nun so gewählt werden, daß die Bedingungen (II.14) bis (II.16.c) und (II.18) für die Ätherfelder durch die mikroskopische Dynamik (II.20.a) und (II.20.b) erfüllt werden, wobei sich zusätzlich eine verschwindende Torsion ($\mathbf{Z} = 0$) ergeben muß. Dies bedeutet aber keineswegs, daß das Phänomen der Torsion in unserer Theorie überhaupt keine Rolle spielen wird. Ganz im Gegenteil: Wir werden zeigen, daß die in (II.19) auftretende $\mathcal{SO}(3)$ -Konnexion \mathbf{A} zu einer Torsion führt, die in engem Zusammenhang mit den Spindichten der Ätherfelder \mathcal{B} , \mathbf{p} steht. Allerdings handelt es sich hierbei um eine 3-dimensionale Oberflächentorsion, die den streng Riemannschen Charakter der 4-dimensionalen Raum-Zeit unberührt läßt.

Durch eine einfache Rechnung erhalten wir aus der oben erwähnten Forderung folgende drei Bedingungen

$$H_{\mu\nu} p^\mu = 0 \quad (\text{II.24.a})$$

$$\mathcal{H}_{i\mu\lambda} p^\mu + \mathcal{B}_{i\mu} H^\mu{}_\lambda = 0 \quad (\text{II.24.b})$$

$$\mathcal{H}_{i\nu\lambda} \mathcal{B}_j{}^\nu + \mathcal{H}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_i{}^\nu = 0 . \quad (\text{II.24.c})$$

Aus den ersten zwei Bedingungen (II.24.a) und (II.24.b) erkennt man, daß \mathbf{H} vollständig durch \mathcal{H}_i und die Ätherfelder bestimmt wird:

$$H_{\nu\lambda} = -\mathcal{B}^i{}_\nu \mathcal{H}_{i\mu\lambda} p^\mu . \quad (\text{II.25})$$

Der Tensor $\mathbf{H} = \{H_{\nu\lambda}\}$, den wir im folgenden als *Hubble-Tensor* bezeichnen werden, bestimmt die äußere Geometrie der charakteristischen Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$. Im Falle eines symmetrischen Tensors ($H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$) ist der charakteristische Vektor ein Gradient ($p_\mu = \partial_\mu \theta$) eines skalaren Feldes θ , welches man als „*Universalzeit*“ betrachten kann. Die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ wird in diesem Fall integrabel und die Integralfächen können als der „*absolute Raum*“ angesehen werden. Dabei erhalten die *charakteristischen Linien* (= Integrallinien des charakteristischen Vektorfeldes

p) die Bedeutung von Weltlinien der Punkte des absoluten Raumes. Verfolgen wir ein 3-Volumenelement des absoluten Raumes, das stets aus denselben absoluten Punkten besteht, entlang der charakteristischen Strömung, so erhalten wir aus Gl. (II.20.b) für seine relative Volumendehnung pro Zeiteinheit (θ) die *Hubble-Konstante* H zu

$$H := \frac{1}{3} H^\mu{}_\mu, \quad (\text{II.26})$$

die im allgemeinen aber nicht konstant sein wird. Sie stellt ein erstes, einfaches Beispiel dar, wie die Geometrie der Raum-Zeit aus den Bewegungsgleichungen (II.20.a) - (II.22) zu konstruieren ist. Insbesondere kann aus diesem Gleichungssystem der *Riemannsche* Krümmungstensor \mathbf{R} eindeutig konstruiert werden. Dabei zeigt sich, daß \mathbf{R} nur von der inneren Krümmung ($\bar{\mathbf{F}}$) der charakteristischen Flächen ($\theta = \text{konst.}$) und dem Hubble-Tensor \mathbf{H} abhängt.

Hier ist nun die Tatsache wichtig, daß \mathbf{H} durch eine Projektion längs der charakteristischen Richtung \mathbf{p} aus dem Objekt \mathcal{H} gewonnen wird (vgl. (II.25)). Dies hat zur Folge, daß im allgemeinen ein Teil der Feldfreiheitsgrade \mathbf{M} von \mathcal{H} herausprojiziert wird; diese nennen wir die *äußeren Feldvariablen* $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$, da sie offensichtlich nicht direkt in die innere Geometrie der Raum-Zeit eingehen. Dadurch wird aber der Riemannsche Krümmungstensor \mathbf{R} nur noch eine Funktion der Ätherfelder \mathcal{B} , \mathbf{p} und der *inneren Feldvariablen* $^{(\text{in})}\mathbf{M}$: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathcal{B}, \mathbf{p}, ^{(\text{in})}\mathbf{M})$. Dieser funktionale Zusammenhang überträgt sich natürlich auch auf den Einstein-Tensor \mathbf{E} : $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathcal{B}, \mathbf{p}, ^{(\text{in})}\mathbf{M})$. Damit entsteht nun die Frage, welche Bedeutung die äußeren Feldvariablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ für die vorliegende Theorie haben.

Die Antwort auf diese Frage ergibt sich aus der Untersuchung der geometrischen Struktur des Vakuums. Wenn man sich nämlich auf den Standpunkt stellt, daß nach Entfernung aller Materie aus dem Universum das sogenannte „Quantenvakuum“ (= Nullpunkt-Fluktuationen aller Quantenfelder) als nicht zu unterdrückender Rest zurückbleibt, so wird man auch zugestehen müssen, daß dessen Energie-

Impuls-Inhalt ${}^{(0)}\mathbf{T}$ die geometrische Struktur des leeren Universums gemäß den Einsteinschen Gleichungen beeinflussen sollte:²

$$E_{\mu\nu} = 8\pi L_P^2 {}^{(0)}T_{\mu\nu} . \quad (\text{II.27})$$

Mißt man also dem Quantenvakuum einen nicht-verschwindenden Energie-Impuls-Inhalt ${}^{(0)}\mathbf{T}$ bei, so kann die Vakuum-Struktur nicht mehr in der flachen Minkowski-Geometrie bestehen! Andererseits sollte man erwarten, daß das Quantenvakuum die Raum-Zeit auf eine etwas andere Art und Weise krümmt als dies die normale Materie bewirkt. Man würde dem Quantenvakuum aufgrund seiner Unvermeidbarkeit gerne eine Zwischenstellung zwischen einer rein geometrischen Größe (wie z.B. der Metrik \mathbf{G}) und einer reinen Materievariable (wie z.B. der Massedichte \mathcal{M} oder dem Druck \mathcal{P}) zuschreiben. Gerade für einen solchen Zweck bieten sich aber nun die äußeren Feldvariablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ unserer Theorie an! Denn einerseits handelt es sich hierbei um geometrische Größen, welche die kovariante Ableitung des Vierbein-Feldes \mathbf{B} , \mathbf{p} bestimmen (vgl. (II.20.a), (II.20.b)), andererseits gehen sie aber definitionsgemäß nicht in die Riemannsche Geometrie der Raum-Zeit ein. Daher liegt es nahe, diese zusätzlichen Freiheitsgrade ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ als Variable mit nicht-verschwindendem Vakuum-Erwartungswert („Vakuumvariable“) zu betrachten, welche die geometrische Struktur des Vakuums beschreiben können. Bezeichnet man also mit ${}^{(e)}\mathbf{T}$ den Energie-Impuls-Inhalt der äußeren Variablen ${}^{(\text{ex})}\mathbf{M}$, so sollte diese Größe ebenso wie ${}^{(m)}\mathbf{T}$ für normale Materie das Raumzeit-Kontinuum nach der Einsteinschen Vorstellung krümmen:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= 8\pi L_P^2 ({}^{(e)}T_{\mu\nu} + {}^{(m)}T_{\mu\nu}) \\ &\left[{}^{(e)}T_{\mu\nu} = {}^{(e)}T_{\mu\nu}(\mathbf{B}, \mathbf{p}, {}^{(\text{ex})}\mathbf{M}) \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

²Die Felder werden in geometrischen Einheiten gemessen [22], so daß ihr physikalischer Energie-Impulstensor $\tilde{\mathbf{T}}$ die Dimension (Länge)⁻⁴ annimmt und dann mit \mathbf{T} bezeichnet wird. ($\mathbf{T} = (\hbar c)^{-1} \tilde{\mathbf{T}}$). Aus diesem Grund enthalten die Einsteinschen Feldgleichungen das Quadrat der Planck Länge $L_P = (\hbar k c^{-3})^{\frac{1}{2}}$ anstelle der Newtonschen Gravitationskonstanten k .

Selbst wenn man alle normale Materie aus dem Universum entfernt ($^{(m)}\mathbf{T} \rightarrow 0$), so bleibt dennoch ein essentiell dynamisches Gebilde zurück ($^{(e)}\mathbf{T} \neq 0$), das wir das „klassische Vakuum“ nennen. Falls man $^{(ex)}\mathbf{M}$ noch zu den geometrischen Variablen rechnen will, könnte man dem Tensor $^{(e)}\mathbf{T}$ die Bedeutung eines Energie-Impuls-Inhaltes der Gravitationskraft zuerkennen. Auf eine ähnliche Weise kann man die Spindichte Σ des Gravitationsfeldes definieren. Eine wichtige Konsequenz der modifizierten Einstein-Gleichungen (II.28) ist die Tatsache, daß der Materietensor $^{(m)}\mathbf{T}$ nicht notwendigerweise divergenzfrei sein muß. Eine eventuell auftretende Matthisson-Kraft der Materie $^{(m)}\mathbf{t} (:= \nabla \cdot ^{(m)}\mathbf{T} \neq 0)$ kann nun durch eine Verzerrung des Vakuums („Vakuum-Polarisation“) wieder kompensiert werden! Vermutlich wird aber die „*Vakuum polarisation*“ nur in exotischen Situationen bedeutsam werden (z.B. in der Kosmologie, bei schwarzen Löchern, Gravitation der Elementarteilchen), sodaß die klassischen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die vorliegende Modifikation der Einsteinschen Theorie nicht berührt werden. Im übrigen können die gewöhnlichen Einsteinschen Gleichungen aus den unsrigen (II.28), zurückgewonnen werden, indem man die äußeren Variablen verschwinden läßt ($^{(ex)}\mathbf{M} \rightarrow 0$), wobei auch der Spin Σ und der Energie-Impuls $^{(e)}\mathbf{T}$ der Gravitation wieder verschwinden.

Die Untersuchung der Eigenschaften eines solchen nicht-trivialen Vakuums bildet den Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen ($^{(m)}\mathbf{T} = 0$). Angesichts des zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmens konnten die Effekte der Vakuum polarisation nicht mehr untersucht werden. Einige interessante Phänomene sind von dem Umstand zu erwarten, daß die Gravitation über die mikroskopische Kraftdichte $^{(e)}\mathbf{t} = -^{(m)}\mathbf{t}$ Energie und Impuls auf die Materie übertragen kann, was in der konventionellen Einsteinschen Theorie nicht möglich ist, da dort wegen des verschwindenden Energie-Impulses der Gravitation ($^{(e)}\mathbf{T} \equiv 0$) auch die auf die Materie ausgeübte Kraftdichte $^{(m)}\mathbf{t}$ identisch verschwinden muß!

Kapitel III

Die Geometrie der (1+3)

Zerlegung

Wie wir gesehen haben, ist die im letzten Abschnitt beschriebene Aufspaltung der Raum-Zeit in eine Zeitrichtung und eine 3-Untergeometrie das eigentliche dynamische Objekt. Da die 3-Untergeometrie auf diese Weise durch die 4-Geometrie der Raum-Zeit induziert wird, können wir natürlich umgekehrt die 4-Geometrie aus der (1+3) Aufspaltung der Raum-Zeit und der entsprechenden 3-Untergeometrie aufbauen.

Wir werden dies in vier Schritten erreichen. Zuerst wird die 3-dimensionale Oberflächenkonnexion hergeleitet, welche durch die 4-dimensionale Riemannsche Geometrie induziert wird. Sodann werden wir die korrespondierende 3-Krümmung mit Hilfe eines Bündelisomorphismus untersuchen, wobei ein zusätzlicher Freiheitsgrad auftaucht, der auch in den mikroskopischen Feldgleichungen vorhanden ist und einer Oberflächentorsion entspricht. Ferner werden wir die Euklidische Foliation näher untersuchen, welche einer speziellen Raum-Zeit Aufspaltung entspricht.

Der nächste Schritt besteht in einer ausführlichen Diskussion der Rolle, welche

die Torsion in der vorliegenden Theorie spielt. Obwohl die vierdimensionale Raum-Zeit einen streng Riemannschen Charakter besitzt, ist die Torsion der dreidimensionalen Untergeometrie eine wichtige Größe und steht in enger Beziehung zur Spindichte der Ätherfelder. Schließlich zeigen wir, daß die mikroskopische Dynamik (II.20.a) - (II.21) nicht nur die Geometrie der Raum-Zeit eindeutig festlegt, sondern auch gegenüber der konventionellen Einsteinschen Theorie noch einen zusätzlichen Feldfreiheitsgrad $(^{ex})\mathbf{M}$ aufweist, der dem Gravitationsfeld als der geometrischen Manifestation des Quantenvakuums eine nicht-triviale Spin- und Energie-Impuls-Dichte verleiht.

III.1 Die charakteristische Konnexion

Die Riemannsche Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ des Tangentialbündels τ_4 der Raum-Zeit induziert eine Konnexion $\overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}}$ im reduzierten Unterbündel $\overset{\cap}{\tau}_4$, die sog. *charakteristische Konnexion*, durch natürliche Projektion $(\overset{\cap}{\mathbf{P}})$ auf die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$. Aufgrund der verschwindenden Torsion von $\mathbf{\Gamma}$ muß die Einschränkung der Oberflächentorsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ (*charakteristische Torsion*) auf $\overset{\cap}{\Delta}$ ebenso verschwinden [18]:

$$\overset{\cap}{Z}\Big|_{\overset{\cap}{\Delta}} \equiv 0 \ , \quad (III.1.a)$$

in Komponentenschreibweise

$$\overset{\cap}{Z}^\lambda_{\mu\nu} := \overset{\cap}{\Gamma}^\lambda_{[\mu\nu]} \quad (III.1.b)$$

$$\mathcal{B}^\rho_\lambda \overset{\cap}{Z}^\lambda_{\mu\nu} \mathcal{B}^\mu_\sigma \mathcal{B}^\nu_\kappa = 0 \ . \quad (III.1.c)$$

Die entsprechende koordinaten-kovariante Ableitung $\overset{\cap}{\nabla}$, die *charakteristische Ableitung*, erhält man aus der Riemannschen Ableitung ∇ durch folgende Zerlegung

$$\overset{\cap}{\nabla} = (||)\overset{\cap}{\nabla} + (\perp)\overset{\cap}{\nabla} \ . \quad (III.2)$$

Der parallele Anteil $(||)\overset{\cap}{\nabla}$ wird hierbei mit Hilfe der Riemannschen Ableitung ∇

und einer Projektion $\overset{\cap}{\mathbf{P}}$ auf $\overset{\cap}{\Delta}$ definiert

$${}^{(\parallel)}\overset{\cap}{\nabla} = \overset{\cap}{\mathbf{P}} \circ \nabla \circ \overset{\cap}{\mathbf{P}} . \quad (\text{III.3})$$

Beispielsweise lautet die parallele Ableitung eines beliebigen τ_4 Schnittes \mathbf{U}

$${}^{(\parallel)}\overset{\cap}{\nabla}_\mu U_\nu = \mathcal{B}^\lambda{}_\nu \nabla_\mu (\mathcal{B}_\lambda{}^\sigma U_\sigma) . \quad (\text{III.4})$$

Den orthogonalen Anteil ${}^{(\perp)}\overset{\cap}{\nabla}$ in (III.2) erhalten wir, indem wir uns vergegenwärtigen, daß $\overset{\cap}{\nabla}$ aufgrund der durch den charakteristischen Vektor \mathbf{p} induzierten (1+3)-Aufspaltung der Raum-Zeit nur auf SO(3)-Skalare wirkt. Es ergibt sich somit folgende Definition

$${}^{(\perp)}\overset{\cap}{\nabla}_\mu U_\nu = p_\nu \partial_\mu (p^\lambda U_\lambda) . \quad (\text{III.5})$$

Damit können wir für einen beliebigen Tangentenvektor \mathbf{U} dessen SO(3) Vektoranteil \mathbf{u} und SO(3) Skalaranteil u definieren durch

$$\begin{aligned} u^i &= \mathcal{B}^i{}_\mu U^\mu \\ u &= U^\mu p_\mu , \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

das heißt \mathbf{U} läßt sich nun folgendermaßen zerlegen

$$U_\mu = u^i \mathcal{B}_{i\mu} + u p_\mu . \quad (\text{III.7})$$

Die charakteristische Ableitung von \mathbf{U} ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} \overset{\cap}{\nabla}_\lambda U_\mu &= (\bar{D}_\lambda u^i) \mathcal{B}_{i\mu} + (\partial_\lambda u) p_\mu \\ &\equiv \partial_\lambda U_\mu - \overset{\cap}{\Gamma}^\nu{}_{\mu\lambda} U_\nu . \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Man beachte hierbei, daß die SO(3) kovariante Ableitung $\bar{\mathbf{D}}$ nicht mit der in den mikroskopischen Feldgleichungen (II.20.a) bis (II.21) auftauchenden Ableitung \mathbf{D} (II.19) übereinzustimmen braucht. Wir werden diesen interessanten Punkt später noch eingehender untersuchen.

Aus der Definition (III.8) der charakteristischen Ableitung $\overset{\cap}{\nabla}$ läßt sich die kovariante Konstanz der Ätherfelder bezüglich $\overset{\cap}{\Gamma}$ folgern:

$$\overset{\cap}{\nabla}_\lambda p_\mu = 0 \quad (\text{III.9.a})$$

$$\overset{\cap}{\mathcal{D}}_\lambda \mathcal{B}_{i\mu} = 0 . \quad (\text{III.9.b})$$

Die Ableitung $\overset{\cap}{\mathcal{D}}$ ist nun genauso wie \mathcal{D} in Gleichung (II.19) definiert, jedoch mit dem Unterschied, daß die zwei Konnexionen Γ , \mathbf{A} durch $\overset{\cap}{\Gamma}$ und $\bar{\mathbf{A}}$ ersetzt werden müssen. Die Bedingungen der kovarianten Konstanz (III.9.a), (III.9.b) sind konsistent mit den Bedingungen (II.15.a) und (II.15.b). Wir werden später sehen, daß die Bedingungen (III.9.a) und (III.9.b) einen affinen Bündelisomorphismus beschreiben, welcher in der (1+3) Aufspaltung eine wichtige Rolle spielt. Bis dahin bemerken wir nur, daß der Projektor \mathbf{B}^2 aufgrund von (III.9.b) kovariant konstant ist

$$\overset{\cap}{\nabla}_\lambda \mathcal{B}_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{III.10})$$

und deshalb als Fasermetrik $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ von $\overset{\cap}{\tau}_4$ verwendet werden kann. Da nun aber beide Anteile \mathbf{B} und \mathbf{p} der Riemannschen Metrik \mathbf{G} (II.17) konstant sind, gilt ebenfalls

$$\overset{\cap}{\nabla}_\lambda G_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{III.11})$$

Das heißt die Metrik \mathbf{G} ist kovariant konstant bezüglich beider Konnexionen Γ und $\overset{\cap}{\Gamma}$. Nach Gleichung (II.5) unterscheiden sich die Konnexionen daher durch einen Kontorsionsterm $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$

$$\overset{\cap}{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \overset{\cap}{K}^\lambda_{\mu\nu} . \quad (\text{III.12})$$

Die Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ bestimmt nun die Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ durch

$$\overset{\cap}{Z}^\lambda_{\mu\nu} = \overset{\cap}{K}^\lambda_{[\mu\nu]} . \quad (\text{III.13})$$

Für $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ kann man eine physikalische Interpretation angeben. Dazu zerlegen wir $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ in einen parallelen ($\overset{||}{\mathbf{K}}$) und einen orthogonalen Teil ($\overset{(\perp)}{\mathbf{K}}$):

$$\overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{||}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} + \overset{(\perp)}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.14})$$

Der orthogonale Teil läßt sich nun mit Hilfe von (II.20.b), (III.9.a) und der Ableitung des charakteristischen Vektors folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \overset{(\perp)}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} &= p^\lambda \nabla_\nu p_\mu - p_\mu \nabla_\nu p^\lambda \\ &= p^\lambda H_{\mu\nu} - p_\mu H^\lambda{}_\nu . \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Definieren wir nun die Spindichten der Ätherfelder nach [13]

$$\overset{(p)}{\Sigma}{}^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{4\pi} [p^\mu (\nabla^\lambda p^\nu) - p^\nu (\nabla^\lambda p^\mu)] \quad (\text{III.16.a})$$

$$\overset{(\mathcal{B})}{\Sigma}{}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{4\pi} [\mathcal{B}_i{}^\mu (\mathcal{D}^\lambda \mathcal{B}^{i\nu}) - \mathcal{B}_i{}^\nu (\mathcal{D}^\lambda \mathcal{B}^{i\mu})] , \quad (\text{III.16.b})$$

dann ist der orthogonale Teil $\overset{(\perp)}{\mathbf{K}}$ identisch mit der Spindichte des charakteristischen Vektorfeldes

$$\overset{(\perp)}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = 4\pi \overset{(p)}{\Sigma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.17})$$

Man kann natürlich annehmen, daß eine ähnliche Beziehung für die Spindichte $\overset{(\mathcal{B})}{\Sigma}$ des \mathcal{B} Feldes und den parallelen Teil $\overset{||}{\mathbf{K}}$ der Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ existiert; dies wird im folgenden näher untersucht.

Aufgrund der Definition (III.8) ist die Anwendung der Ableitung $\overset{\cap}{\nabla}$ nicht nur auf $\overset{\cap}{\tau}_4$ Objekte beschränkt. Das heißt, daß die charakteristische Konnexions 1-Form $\overset{\cap}{\Gamma}$ auch Komponenten entlang der charakteristischen Richtung besitzt und demzufolge eine entsprechende Zerlegung zuläßt:

$$\overset{\cap}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\cap}{\gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} + p^\lambda z_{\mu\nu} . \quad (\text{III.18})$$

Hierbei bezeichnet $\overset{\cap}{\gamma}$ den *wesentlichen Teil* von $\overset{\cap}{\Gamma}$

$$\overset{\cap}{\gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \mathcal{B}^\lambda{}_\sigma \overset{\cap}{\Gamma}{}^\sigma{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.19})$$

$\overset{\cap}{\gamma}$ ist im allgemeinen nicht symmetrisch, sondern wird vielmehr den parallelen Teil der charakteristischen Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ festlegen:

$$\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} = (\parallel)\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} + (\perp)\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} \quad (\text{III.20.a})$$

$$(\parallel)\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} = \overset{\cap}{\gamma}^{\lambda}_{[\mu\nu]} . \quad (\text{III.20.b})$$

Der orthogonale Teil $(\perp)\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$

$$(\perp)\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} = p^{\lambda} z_{[\mu\nu]} \quad (\text{III.21})$$

läßt sich mit der Integrabilitätsbedingung für $\overset{\cap}{\Delta}$ in Beziehung setzen. Und zwar gilt

$$\overset{\cap}{\nabla}_{[\lambda} p_{\mu]} \equiv p_{[\lambda} f_{\mu]} + \overset{\cap}{Z}^{\rho}_{\lambda\mu} p_{\rho} . \quad (\text{III.22})$$

Den hier auftauchenden *Frobeniusvektor* \mathbf{f} können wir als einen $\overset{\cap}{\tau}_4$ Schnitt betrachten und ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen

$$p^{\mu} f_{\mu} = 0 . \quad (\text{III.23})$$

Aus (III.22) schließt man im Falle der Integrabilität von $\overset{\cap}{\Delta}$

$$z_{[\mu\nu]} = f_{[\mu} p_{\nu]} \quad (\text{III.24})$$

und somit

$$(\perp)\overset{\cap}{Z}^{\lambda}_{\mu\nu} = p^{\lambda} f_{[\mu} p_{\nu]} . \quad (\text{III.25})$$

Man beachte, daß die Einschränkung des orthogonalen Anteils $(\perp)\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ auf $\overset{\cap}{\Delta}$ verschwindet, was dann aufgrund von (III.1.c) auch für den parallelen Anteil $(\parallel)\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ gelten muß.

III.2 Die innere Krümmung des charakteristischen Bündels

Aufgrund der Einbettung in das Tangentialbündel der Raum-Zeit besitzt das charakteristische Bündel $\overset{\cap}{\tau}_4$ die Gruppe $GL(3, \mathbf{R})$ als natürliche Strukturgruppe. Aus diesem Grund stimmt dessen Eichgruppe, welche als die kleinst mögliche Untergruppe der Strukturgruppe definiert ist, mit der gewöhnlichen Rotationsgruppe $SO(3)$, der maximalen kompakten Untergruppe von $GL(3, \mathbf{R})$, überein. Demnach ist es möglich, die intrinsische $\overset{\cap}{\tau}_4$ Geometrie in der Form einer $SO(3)$ Eichtheorie zu beschreiben!

Die grundlegenden $SO(3)$ Objekte sind die Ätherfelder \mathcal{B}_i , welche sich homogen transformieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}'_{i\mu} &= S^j_i \mathcal{B}_{j\mu} \\ \mathbf{S} &= \{S^j_i\} \in SO(3)\end{aligned}\tag{III.26}$$

Wir können nun mit Hilfe der Ätherfelder die Einbettung eines $SO(3)$ -Bündels $\bar{\tau}_4$ in das Tangentialbündel τ_4 definieren. Da $\bar{\tau}_4$, das sog. *repräsentative Bündel*, aufgrund seiner Konstruktion isomorph zu $\overset{\cap}{\tau}_4$ ist, muß eine 1-1 Abbildung $[B] = \left\{ [\bar{B}], [\overset{\cap}{B}] \right\}$ existieren, welche die folgenden Relationen erfüllt

$$[\bar{B}] : \overset{\cap}{\tau}_4 \rightarrow \bar{\tau}_4 \tag{III.27.a}$$

$$[\overset{\cap}{B}] : \bar{\tau}_4 \rightarrow \overset{\cap}{\tau}_4 \tag{III.27.b}$$

sodaß gilt

$$[\bar{B}] \circ [\overset{\cap}{B}] = \text{id}_{\bar{\tau}_4} \tag{III.28.a}$$

$$[\overset{\cap}{B}] \circ [\bar{B}] = \text{id}_{\overset{\cap}{\tau}_4} . \tag{III.28.b}$$

In Komponenten geschrieben erkennt man, daß diese Abbildungen die Schnitte ν

$(x) \in \bar{\tau}_4$ und $\mathbf{V}(x) \in \bar{\tau}_4$ zueinander in Beziehung setzen:

$$\nu_i = \mathcal{B}_{i\mu} V^\mu \quad (\text{III.29.a})$$

$$V_\mu = \mathcal{B}_{i\mu} \nu^i. \quad (\text{III.29.b})$$

Dabei ist die Gültigkeit von (III.28.a) und (III.28.b) aufgrund der Gleichungen (II.15.a) bis (II.16.c) gewährleistet. Ferner muß die Aufspaltung der Bündeltangentialräume in einen horizontalen und vertikalen Unterraum mit der Abbildung $[B]$ verträglich sein, d.h. es muß gelten:

$$\bar{\mathbf{D}} \circ [\bar{B}] = [\bar{B}] \circ \bar{\nabla} \quad (\text{III.30.a})$$

$$\bar{\nabla} \circ [\bar{B}] = [\bar{B}] \circ \bar{\mathbf{D}}. \quad (\text{III.30.b})$$

Hierbei gehört zur $\text{SO}(3)$ kovarianten Ableitung $\bar{\mathbf{D}}$ aus $\bar{\tau}_4$ eine $\mathcal{SO}(3)$ wertige Konnexion $\bar{\mathbf{A}}$, welche im allgemeinen nicht mit der Konnexion \mathbf{A} übereinstimmt, die in den mikroskopischen Feldgleichungen (II.20.a) bis (II.21) benützt wird. Die Relationen (III.30.a) und (III.30.b) lauten in Komponenten

$$\bar{D}_\mu \nu_i = \mathcal{B}_{i\lambda} \left(\bar{\nabla}_\mu V^\lambda \right) \quad (\text{III.31.a})$$

$$\bar{\nabla}_\mu V_\lambda = \mathcal{B}_{i\lambda} (\bar{D}_\mu \nu^i) \quad (\text{III.31.b})$$

und sind aufgrund von Gleichung (III.9.b) erfüllt.

Im letzten Abschnitt haben wir die Beziehung zwischen den zwei Konnexionen $\mathbf{\Gamma}$ und $\bar{\mathbf{\Gamma}}$ verdeutlicht. Nun wollen wir untersuchen, welche Relation zwischen \mathbf{A} und $\bar{\mathbf{A}}$ besteht. Dazu beachten wir, daß die Konstruktion von $\bar{\mathbf{D}}$ aus $\bar{\mathcal{D}}$ durch einen ähnlichen Prozeß wie bei der Bildung von $\bar{\nabla}$ aus ∇ ermöglicht wird. Das bedeutet, wir können schreiben

$$\bar{\mathbf{D}} = (\parallel) \bar{\mathcal{D}} + (\perp) \bar{\mathcal{D}}, \quad (\text{III.32})$$

wobei symbolisch wieder gilt

$$(\parallel) \overset{\cap}{\bar{\mathcal{D}}} = \overset{\cap}{\mathbf{P}} \circ \bar{\mathcal{D}} \circ \overset{\cap}{\mathbf{P}} \quad (\text{III.33.a})$$

$$(\perp) \overset{\cap}{\bar{\mathcal{D}}} = \mathbf{p} \otimes \bar{\mathcal{D}} \circ \mathbf{p} \bullet . \quad (\text{III.33.b})$$

Die Bedingung der kovarianten Konstanz (III.9.b) läßt sich leicht erfüllen, wenn wir $\bar{\mathcal{D}}$ folgendermaßen definieren

$$\bar{\mathcal{D}} := \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \bullet \mathcal{D} \quad (\text{III.34})$$

bzw. in Komponenten

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = p_\nu p^\lambda (\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\lambda}) . \quad (\text{III.35})$$

Die Konnexion $\bar{\mathbf{A}}$, welche Gleichung (III.35) genügt, erhalten wir durch den Ansatz

$$\bar{A}_{i\mu} = A_{i\mu} + C_{i\mu} \quad (\text{III.36})$$

wobei wir den Eichvektor \mathbf{C} noch bestimmen müssen. Mit diesem Ansatz ergibt sich für die linke Seite von (III.35)

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} + \epsilon_i^{jk} C_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} \quad (\text{III.37})$$

und somit

$$C_{j\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_j^{mn} \mathcal{B}_{m\sigma} (\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_n^\sigma) . \quad (\text{III.38})$$

Dem repräsentativen Bündel $\bar{\tau}_4$ mit der Konnexion $\bar{\mathbf{A}}$ kann man also ein neues Bündel $\tilde{\tau}_4$ mit der Konnexion \mathbf{A} zuordnen, wobei $\bar{\mathbf{A}}$ das $\mathcal{SO}(3)$ Analogon der charakteristischen Konnexion $\overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}}$ darstellt; somit kann man \mathbf{A} als *geometrischen Teil* der Konnexion $\bar{\mathbf{A}}$ betrachten. Der *dynamische Teil* \mathbf{C} von $\bar{\mathbf{A}}$ ist unabhängig von der Riemannschen Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ und beeinflußt deshalb nicht direkt die 4-Geometrie der Raum-Zeit! Dagegen wird die Kinematik der Triade \mathcal{B}_i wesentlich durch den dynamischen Teil \mathbf{C} über die mikroskopischen Feldgleichungen (II.20.a)

bis (II.22) mitbestimmt. Aufgrund dieses Sachverhaltes können die äußeren Variablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$ mit dem Eichvektor \mathbf{C} identifiziert werden! Aus der Zerlegung (III.36) der Konnexion \mathbf{A} in einen geometrischen und einen dynamischen Teil erhalten wir eine analoge Aufspaltung der $\bar{\tau}_4$ Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$:

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = F_{i\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu C_{i\nu} - \mathcal{D}_\nu C_{i\mu} + \epsilon_i^{jk} C_{j\mu} C_{k\nu} . \quad (\text{III.39})$$

Diese Darstellung der Krümmung ist nun geeignet um die Funktion $\mathcal{F}_i(\mathcal{B}, \mathbf{p}, \mathbf{M})$ (II.22), welche das System der mikroskopischen Feldgleichungen schließt, zu untersuchen. Der dynamische Teil von \mathbf{F} , welcher aus dem Eichvektor \mathbf{C} besteht, ist nun schon durch Gleichung (III.38) festgelegt. Das bedeutet wir dürfen nur noch über den geometrischen Teil \mathbf{F} von $\bar{\mathbf{F}}$ verfügen! Offensichtlich charakterisiert $\bar{\mathbf{F}}$ die 3-Geometrie der charakteristischen Flächen. Die einfachste Wahl für $\bar{\mathbf{F}}$ ist

$$\bar{F}_{i\mu\nu} \equiv 0 . \quad (\text{III.40})$$

Das heißt die charakteristischen Flächen besitzen eine Euklidische 3-Geometrie (*Euklidische Foliation*). Nebenbei bemerkt existiert kein Flachheitsproblem für solch ein Universum [27]. Die Krümmung \mathbf{F} (III.39) besteht jetzt nur aus dem dynamischen Teil und erfüllt damit automatisch die Bianchi-Identität (II.23). Die so festgelegten charakteristischen Flächen können als *absoluter Raum* aufgefasst werden, welcher durch eine spontane lokale Aufspaltung der Raum-Zeit in einen 3-Raum $\hat{\Delta}_x$ und eine Zeitrichtung \mathbf{p}_x entsteht. Dieser absolute Raum wird dabei mit einer Euklidischen Untergeometrie ausgestattet. Verbinden wir diese (1+3) Aufspaltung mit dem Äquivalenzprinzip, so ist die Existenz eines ausgezeichneten Lorentz-Bezugssystems garantiert und kommt Newton's absoluter Vorstellung von Raum und Zeit recht nahe.

III.3 Die Torsion

Wie die Untersuchungen über die Spindichte der Ätherfelder und die Integrabilität von $\overset{\cap}{\Delta}$ im vorletzten Abschnitt gezeigt haben, spielt die Torsion trotz der Tatsache, daß die 4-Geometrie der Raum-Zeit in unserer Theorie torsionsfrei ist, eine gewisse Rolle. Aus diesem Grund wollen wir die Effekte der Torsion für den allgemeineren Fall der Nichtintegrabilität der charakteristischen Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ berechnen.

Der parallele Anteil $^{(\parallel)}\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ der charakteristischen Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ (III.14) kann aus der Konstanz von \mathbf{B}_i (III.9.b) bestimmt werden. Wir erhalten

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = \overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\nu\mu} \mathcal{B}_{i\lambda} \quad (\text{III.41})$$

und daraus mit Hilfe des orthogonalen Teils $^{(\perp)}\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ (III.15)

$$^{(\parallel)}\overset{\cap}{K}{}_{\sigma\nu\mu} = 0 . \quad (\text{III.42})$$

Das bedeutet wir können Gleichung (III.17) verallgemeinern zu

$$\overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = 4\pi {}^{(p)}\Sigma^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.43})$$

Es scheint nun etwas seltsam zu sein, daß sich die charakteristische Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ ausschließlich aus der Spindichte $^{(p)}\Sigma$ des charakteristischen Vektorfeldes zusammensetzt, während doch die Gleichung (III.17) zu der Vermutung berechtigt, daß sich der parallele Teil $^{(\parallel)}\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ aus der Spindichte $^{(\mathcal{B})}\Sigma$ (III.16.b) des \mathbf{B} Feldes zusammensetzt und demnach die totale Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ von der totalen Spindichte Σ abhängt:

$$\Sigma^{\mu\nu\lambda} = {}^{(p)}\Sigma^{\mu\nu\lambda} + {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_i{}^\mu C_j{}^\lambda \mathcal{B}_k{}^\nu . \quad (\text{III.44})$$

Man beachte jedoch, daß die zwei möglichen Definitionen von $^{(\mathcal{B})}\Sigma$ davon abhängen, ob man die totale Konnexion \mathbf{A} wie in Gleichung (III.16.b), oder nur den geometrischen Teil $\bar{\mathbf{A}}$ verwendet. Es gilt die folgende Beziehung zwischen den zwei Ausdrücken

für ${}^{(\mathcal{B})}\Sigma$:

$$\begin{aligned} {}^{(\mathcal{B})}\bar{\Sigma}^{\rho\mu\nu} &= 2 {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\rho\mu\nu} + \mathcal{B}^\rho{}_\kappa {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\mu\kappa\nu} - \mathcal{B}^\mu{}_\kappa {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\rho\kappa\nu} \\ &= p^\mu p_\kappa {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\rho\kappa\nu} - p^\rho p_\kappa {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\mu\kappa\nu} . \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Da die charakteristische Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ ein Objekt aus dem Bündel $\overset{\cap}{\tau}_4$ ist, sollte sie sich auf die Spindichte $\bar{\Sigma}$ ($:= {}^{(\mathcal{B})}\bar{\Sigma} + {}^{(p)}\Sigma$) beziehen und nicht auf die totale Dichte Σ (III.44). Eine einfache Rechnung zeigt jedoch, daß der geometrische Teil $\bar{\Sigma}$ der totalen Dichte Σ verschwindet ($\bar{\Sigma} \equiv 0$); im Gegensatz zu $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$! Deshalb ist es nun klar, warum der parallele Teil ${}^{(\parallel)}\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ und die Spindichte ${}^{(\mathcal{B})}\bar{\Sigma}$ keiner so einfachen Beziehung gehorchen können wie es für den orthogonalen Teil ${}^{(\perp)}\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ und ${}^{(p)}\Sigma$ in Gleichung (III.17) der Fall ist.

Die charakteristische Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ läßt sich mit Hilfe des Hubble-Tensors ausdrücken

$$\overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = p^\lambda H_{\mu\nu} - p_\mu H^\lambda{}_\nu , \quad (\text{III.46})$$

womit die charakteristische Torsion die folgende Gestalt annimmt

$$\overset{\cap}{Z}{}^\sigma{}_{\nu\lambda} \equiv \overset{\cap}{K}{}^\sigma{}_{[\nu\lambda]} = p^\sigma H_{[\nu\lambda]} + H^\sigma{}_{[\nu} p_{\lambda]} .$$

In dieser Form treten die Torsionseigenschaft (III.1.b), (III.1.c) und die Zerlegung (III.20.a), (III.20.b) deutlich hervor. Die allgemeine Beziehung (II.6) zwischen Torsion und Kontorsion ist im Falle eines verschwindenden Nichtmetrizitätstensors \mathbf{Q} für $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ und $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ identisch erfüllt.

Im Hinblick auf konkrete Anwendungen ist es vorteilhaft, den Hubble-Tensor in einen parallelen und einen senkrechten Anteil zu zerlegen

$$H_{\nu\lambda} = h_{\nu\lambda} + f_\nu p_\lambda \quad (\text{III.47.a})$$

$$h_{\nu\lambda} p^\nu = h_{\nu\lambda} p^\lambda = 0 . \quad (\text{III.47.b})$$

Den rein parallelen Teil \mathbf{h} wollen wir *reduzierten Hubble-Tensor* nennen. Ferner zerlegen wir \mathbf{h} in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$h_{\nu\lambda} = \overset{+}{h}_{\nu\lambda} + \overset{-}{h}_{\nu\lambda} \quad (\text{III.48.a})$$

$$\overset{+}{h}_{\nu\lambda} = \overset{+}{h}_{\lambda\nu} \quad (\text{III.48.b})$$

$$\overset{-}{h}_{\nu\lambda} = -\overset{-}{h}_{\lambda\nu} \quad (\text{III.48.c})$$

Die Integrabilitätsbedingung für die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ besteht offensichtlich im Verschwinden des antisymmetrischen Anteils ($\overset{-}{\mathbf{h}} \equiv 0$). Damit ergibt sich die charakteristische Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ zu

$$\overset{\cap}{Z}{}^\sigma{}_{\nu\lambda} = p^\sigma \overset{-}{h}_{\nu\lambda} + p^\sigma f_{[\nu} p_{\lambda]} + h^\sigma{}_{[\nu} p_{\lambda]} , \quad (\text{III.49})$$

woraus wir sofort ihren parallelen und orthogonalen Teil (vgl. (III.20.a)) entnehmen können:

$${}^{(\perp)}\overset{\cap}{Z}{}^\sigma{}_{\nu\lambda} = p^\sigma \overset{-}{h}_{\nu\lambda} + p^\sigma f_{[\nu} p_{\lambda]} \quad (\text{III.50.a})$$

$${}^{(\parallel)}\overset{\cap}{Z}{}^\sigma{}_{\nu\lambda} = h^\sigma{}_{[\nu} p_{\lambda]} . \quad (\text{III.50.b})$$

Im integrablen Fall ($\overset{-}{\mathbf{h}} \equiv 0$) erhalten wir wieder (III.25).

Es scheint nun etwas sonderbar zu sein, daß auch die ursprüngliche Spindichte ${}^{(\mathcal{B})}\Sigma$ (III.16.b) des \mathcal{B} Feldes nicht in der charakteristischen Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ (III.43) auftaucht. Der Grund besteht darin, daß die charakteristische Konnexion auf den charakteristischen Flächen torsionsfrei sein muß (vgl. (III.1.b)). Dies wird im allgemeinen nur durch die Spindichte ${}^{(p)}\Sigma$ (III.16.a) des \mathbf{p} Feldes aber nicht durch ${}^{(\mathcal{B})}\Sigma$ (III.16.b) gewährleistet.

Trotzdem bewirkt die Spindichte des \mathcal{B} Feldes eine gewisse Kontorsion. Um diese Tatsache zu untersuchen, wollen wir die Konnexion $\overset{\sim}{\Gamma}$ einführen, welche ähnlich wie $\overset{\cap}{\Gamma}$ im charakteristischen Bündel $\overset{\cap}{\tau}_4$ nun in einem Bündel $\overset{\sim}{\tau}_4$ wirkt, jedoch \mathbf{A} als $\mathcal{SO}(3)$ Gegenstück in einem Bündel $\tilde{\tau}_4$ besitzt. Das bedeutet wir

betrachten einen zweiten Bündelisomorphismus zwischen $\check{\tau}_4$ und $\tilde{\tau}_4$ wobei die Gleichungen (III.27.a) bis (III.31.b) weiterhin gelten, allerdings mit den Ersetzungen $\left\{ \tau_4, [\bar{B}], [\hat{B}], \hat{\nabla}, \bar{\mathcal{D}}, \hat{\bar{\mathcal{D}}} \right\} \rightarrow \left\{ \tilde{\tau}_4, [\tilde{B}], [\check{B}], \check{\nabla}, \mathcal{D}, \check{\bar{\mathcal{D}}} \right\}$. Die Gleichungen (III.30.a) und (III.30.b) lauten jetzt beispielsweise

$$\mathbf{D} \circ [\tilde{B}] = [\tilde{B}] \circ \check{\nabla} \quad (\text{III.51.a})$$

$$\check{\nabla} \circ [\check{B}] = [\check{B}] \circ \mathbf{D} . \quad (\text{III.51.b})$$

Der affine Bündelisomorphismus bezieht sich jetzt also auf die Konnexionen $\mathbf{A}, \check{\Gamma}$ anstatt auf $\bar{\mathbf{A}}, \hat{\Gamma}$ wie im ersten Fall. $\check{\Gamma}$ soll jedoch weiterhin eine Oberflächenkonnexion sein, d.h es gilt:

$$\check{\nabla}_\mu p_\nu = 0 \quad (\text{III.52})$$

$$\check{\nabla}_\mu \mathcal{B}_{\nu\lambda} = 0 , \quad (\text{III.53})$$

sowie

$$\check{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = 0 . \quad (\text{III.54})$$

Damit erhalten wir für die *relative Kontorsion* $\overset{\cup}{\mathbf{K}}$ von $\check{\Gamma}$ bezüglich $\hat{\Gamma}$

$$\overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} := \hat{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} - \check{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_i{}^\lambda C_{j\nu} \mathcal{B}_{k\mu} . \quad (\text{III.55})$$

Diese Gleichung zeigt die Bedeutung der Kontorsion $\overset{\cup}{\mathbf{K}}$. Sie beinhaltet gerade den in der Konnexion \mathbf{A} (III.36) eingeführten Freiheitsgrad in Form des Eichvektors \mathbf{C} . Setzen wir nun \mathbf{C} aus Gleichung (III.38) in (III.55) ein, so erhalten wir

$$\overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\mathcal{B}^\lambda{}_\sigma \mathcal{B}^i{}_\mu (\mathcal{D}_\nu \mathcal{B}_i{}^\sigma) - \mathcal{B}_{\mu\sigma} \mathcal{B}^{i\lambda} (\mathcal{D}_\nu \mathcal{B}_i{}^\sigma) \right] . \quad (\text{III.56})$$

Die *relative Torsion* $\overset{\cup}{\mathbf{Z}}$ definieren wir nun als

$$\overset{\cup}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} := \overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\lambda} (C_{j\nu} \mathcal{B}_{k\mu} - C_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu}) \quad (\text{III.57})$$

so daß die Beziehung (II.6) im Fall verschwindender Nicht-Metrizität $\overset{\cup}{\mathbf{Q}}$ für $\overset{\cup}{\mathbf{Z}}$ und $\overset{\cup}{\mathbf{K}}$ gerade erfüllt wird. Die Gleichung (III.56) können wir natürlich auch mit Hilfe der Spindichten Σ der Ätherfelder ausdrücken:

$$\overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = -2\pi \left[{}^{(\mathcal{B})}\Sigma^\lambda{}_{\mu\nu} + \mathcal{B}^\lambda{}_\sigma {}^{(\mathcal{B})}\Sigma_\mu{}^\sigma{}_\nu - \mathcal{B}_{\mu\sigma} {}^{(\mathcal{B})}\Sigma^{\lambda\sigma}{}_\nu \right] . \quad (\text{III.58})$$

Damit ist die zur Spindichte ${}^{(\mathcal{B})}\Sigma$ gehörige Kontorsion aufgefunden. Verbinden wir nun die Gleichungen (III.60) und (III.55), so ergibt sich die *totale Kontorsion* $\overset{\sim}{\mathbf{K}}$ zu

$$\tilde{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} := \overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} - \overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} \quad (\text{III.59})$$

welche die Abweichung der torsionsfreien Konnexion Γ von der modifizierten Oberflächenkonnexion $\overset{\sim}{\Gamma}$ beschreibt:

$$\overset{\sim}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \tilde{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.60})$$

Die *totale Torsion* $\overset{\sim}{\mathbf{Z}}$ lautet somit

$$\tilde{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \tilde{K}{}^\lambda{}_{[\mu\nu]} = \overset{\cap}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} - \overset{\cup}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{III.61})$$

Im allgemeinen wird die totale Torsion $\overset{\sim}{\mathbf{Z}}$ die Oberflächenbedingung (III.1.c) nicht erfüllen. Aus diesem Grund bestimmen die mikroskopischen Feldgleichungen (II.20.a) bis (II.20.b) nicht nur die Raum-Zeit Geometrie, sondern führen auch einen neuen Freiheitsgrad ein, dessen geometrische Bedeutung in der zusätzlichen Oberflächen-Kontorsion $\overset{\cup}{\mathbf{K}}$ liegt. Die mikroskopischen Feldgleichungen bestimmen also nicht nur die Verknüpfung der gravitierenden Materie mit der Raum-Zeit Geometrie wie es in der Einsteinschen Theorie der Fall ist, sondern enthalten auch einen zusätzlichen Eichvektor \mathbf{C} nicht-Riemannschen Ursprungs, dessen physikalische Bedeutung zu unserer Verfügung steht. *Entsprechend unserer oben dargelegten Philosophie (III.17) messen wir dem neuen Feldfreiheitsgrad \mathbf{C} die Bedeutung einer Spin-Variablen zu!*

III.4 Die Krümmung

Die Zerlegung der Raum-Zeit in die charakteristischen Flächen ermöglicht es, die 4-Krümmung \mathbf{R} aus der inneren und äußeren Krümmung dieser 3-Flächen aufzubauen. Dadurch werden wir, insbesondere im Falle der Euklidischen Foliation, den Einfluß der 3-Krümmung auf die 4-Geometrie untersuchen können. Außerdem werden wir für den Hubble-Tensor Bedingungen finden, mit denen wir eine streng Riemannsche Raum-Zeit erhalten, deren Krümmung \mathbf{R} folgende zwei Bianchi-Identitäten erfüllen muß

$$R_{\mu[\sigma\nu\lambda]} \equiv 0 \quad (\text{III.62.a})$$

$$R_{\mu\sigma[\nu\lambda;\rho]} \equiv 0 . \quad (\text{III.62.b})$$

Die Zerlegung der Riemannschen Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ (III.12) in die charakteristische Konnexion $\overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}}$ und Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ induziert nun eine analoge Aufspaltung der Krümmung \mathbf{R} (II.9):

$$R^\lambda_{\mu\sigma\nu} = \overset{\cap}{R}^\lambda_{\mu\sigma\nu} + \overset{\cap}{\nabla}_\nu \overset{\cap}{K}^\lambda_{\mu\sigma} - \overset{\cap}{\nabla}_\sigma \overset{\cap}{K}^\lambda_{\mu\nu} + \overset{\cap}{K}^\lambda_{\rho\sigma} \overset{\cap}{K}^\rho_{\mu\nu} - \overset{\cap}{K}^\lambda_{\rho\nu} \overset{\cap}{K}^\rho_{\mu\sigma} - 2 \overset{\cap}{Z}^\rho_{\sigma\nu} \overset{\cap}{K}^\lambda_{\mu\rho} . \quad (\text{III.63})$$

Die 4-Krümmung läßt sich somit vollständig durch Größen der charakteristischen 3-Geometrie darstellen. Um die rechte Seite von Gleichung (III.63) in Abhängigkeit von $\bar{\mathbf{F}}$ und \mathbf{H} zu berechnen, benützen wir die Identität

$$\left(\overset{\cap}{\mathcal{D}}_\nu \overset{\cap}{\mathcal{D}}_\lambda - \overset{\cap}{\mathcal{D}}_\lambda \overset{\cap}{\mathcal{D}}_\nu \right) \mathcal{B}_{i\mu} = \epsilon_i^{jk} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} - \overset{\cap}{R}^\rho_{\mu\nu\lambda} \mathcal{B}_{i\rho} + 2 \overset{\cap}{Z}^\rho_{\nu\lambda} \left(\overset{\cap}{\mathcal{D}}_\rho \mathcal{B}_{i\mu} \right) , \quad (\text{III.64})$$

welche sich wegen der kovarianten Konstanz von $\mathcal{B}_{i\mu}$ (III.9.b) vereinfacht zu

$$\mathcal{B}_{i\rho} \overset{\cap}{R}^\rho_{\mu\nu\lambda} = \epsilon_i^{jk} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} . \quad (\text{III.65})$$

Um nun diese Gleichung weiter nach $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$ aufzulösen, benützen wir die Tatsache, daß der charakteristische Vektor ebenfalls kovariant konstant ist (III.9.a). Die

Identität

$$\left(\overset{\cap}{\nabla}_\nu \overset{\cap}{\nabla}_\lambda - \overset{\cap}{\nabla}_\lambda \overset{\cap}{\nabla}_\nu \right) p_\mu = -\overset{\cap}{R}^\rho_{\mu\nu\lambda} p_\rho \quad (\text{III.66})$$

vereinfacht sich somit zu

$$\overset{\cap}{R}^\rho_{\mu\nu\lambda} p_\rho = 0 . \quad (\text{III.67})$$

Dieses Ergebnis besagt nun zusammen mit der Metrizitätsbedingung (III.11), daß die Holonomie-Gruppe der Oberflächenkonnexion $\overset{\cap}{\Gamma}$ wie die gewöhnliche Rotationsgruppe $\text{SO}(3)$ auf die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ wirkt. Aus Gleichung (III.65) erhalten wir daher für $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$

$$\overset{\cap}{R}_{\sigma\mu\nu\lambda} = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\sigma} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} . \quad (\text{III.68})$$

Setzen wir nun noch unsere Gleichungen für die Torsion (III.13) und Kontorsion (III.46) in (III.63) ein, so läßt sich \mathbf{R} durch die innere Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ und den Hubble-Tensor \mathbf{H} ausdrücken

$$\begin{aligned} R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\mu} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\sigma} + H_{\mu\lambda} H_{\sigma\nu} - H_{\mu\nu} H_{\sigma\lambda} \\ &+ p_\mu (\nabla_\lambda H_{\sigma\nu} - \nabla_\nu H_{\sigma\lambda}) - p_\sigma (\nabla_\lambda H_{\mu\nu} - \nabla_\nu H_{\mu\lambda}) . \end{aligned} \quad (\text{III.69})$$

Im Falle einer Euklidischen Foliation ($\bar{\mathbf{F}} \equiv 0$) wird die 4-Krümmung vollständig durch den Hubble-Tensor \mathbf{H} festgelegt. Der entgegengesetzte Fall liegt vor, wenn der charakteristische Vektor \mathbf{p} bezüglich Γ konstant ist (dann ist $\mathbf{H} \equiv 0$, s. (II.20.b)), so daß die 4-Krümmung nur durch die 3-Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ der charakteristischen Flächen bestimmt wird. Wir werden weiter unten zwei Beispiele für diese Grenzfälle betrachten.

Gleichung (III.69) erlaubt nun die Zerlegung der Krümmung \mathbf{R} in einen parallelen ($\parallel \mathbf{R}$) und einen senkrechten Teil ($\perp \mathbf{R}$):

$$R_{\mu\sigma\nu\lambda} = \parallel R_{\mu\sigma\nu\lambda} + \perp R_{\mu\sigma\nu\lambda} \quad (\text{III.70})$$

mit

$$\parallel R_{\mu\sigma\nu\lambda} = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\mu} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\sigma} + H_{\mu\lambda} H_{\sigma\nu} - H_{\mu\nu} H_{\sigma\lambda} \quad (\text{III.71})$$

und

$${}^\perp R_{\mu\sigma\nu\lambda} = p_\mu (\nabla_\lambda H_{\sigma\nu} - \nabla_\nu H_{\sigma\lambda}) - p_\sigma (\nabla_\lambda H_{\mu\nu} - \nabla_\nu H_{\mu\lambda}) . \quad (\text{III.72})$$

Diese Zerlegung wird für die folgenden Betrachtungen sehr nützlich sein. Man beachte jedoch, daß die parallele Krümmung ${}^\parallel \mathbf{R}$, obwohl sie in $\hat{\Delta}$ wirkt, nicht mit der charakteristischen Krümmung $\hat{\mathbf{R}}$ (III.68) identisch ist.

Nachdem die allgemeine Gestalt der Riemannschen Krümmung \mathbf{R} bekannt ist, können wir uns nun der Frage zuwenden, wodurch der Riemannsche Charakter der Raum-Zeit gewährleistet wird. Das bedeutet, daß die beiden Bianchi-Identitäten (III.62.a) und (III.62.b) einschränkende Bedingungen für den Hubble-Tensor und die 3-Geometrie liefern müssen. Durch Einsetzen können wir uns leicht davon überzeugen, daß die zweite Bianchi-Identität (III.62.b) automatisch erfüllt ist, vorausgesetzt die analoge Bianchi-Identität für die 3-Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ gilt:

$$\bar{\mathcal{D}}_\rho \bar{F}_{j\nu\lambda} + \bar{\mathcal{D}}_\nu \bar{F}_{j\lambda\rho} + \bar{\mathcal{D}}_\lambda \bar{F}_{j\rho\nu} \equiv 0 . \quad (\text{III.73})$$

Gleichung (III.62.b) liefert also keine weitere Einschränkung für die mikroskopischen Feldgleichungen.

Dagegen erhalten wir aus der ersten Bianchi-Identität (III.62.a) für den orthogonalen Teil ${}^\perp \mathbf{R}$ eine Bedingung an den Hubble-Tensor \mathbf{H} :

$$\nabla_{[\lambda} H_{\sigma\nu]} \equiv 0 . \quad (\text{III.74})$$

Für die Herleitung der aus dem parallelen Teil ${}^\parallel \mathbf{R}$ von \mathbf{R} stammenden Bedingung nehmen wir zur Vereinfachung den speziellen Fall einer Euklidischen Foliation der Raum-Zeit an. Damit erhalten wir für den reduzierten Hubble-Tensor (s. (III.48.a) bis (III.48.c))

$$h_{\mu[\lambda} \bar{h}_{\sigma\nu]} \equiv 0 . \quad (\text{III.75})$$

Da der schiefsymmetrische Teil $\bar{\mathbf{h}}$ von \mathbf{h} einem $\hat{\tau}_4$ Schnitt \mathbf{l} äquivalent ist, gilt

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} l^\lambda p^\sigma . \quad (\text{III.76})$$

Die Bedingung (III.75) kann daher auch in folgender Weise formuliert werden

$$h_{\mu\nu}^+ l^\nu = 0 . \quad (\text{III.77})$$

Das bedeutet nichts anderes als daß der symmetrische Teil \mathbf{h}^+ von \mathbf{h} im Falle der Nichtintegrabilität der charakteristischen Distribution $\hat{\Delta}$ und bei Euklidischer Foliation der Raum-Zeit einen 2-dimensionalen Tensor darstellen muß.

Ferner läßt sich aus der ersten Bianchi-Identität für ${}^{\parallel}\mathbf{R}$ eine weitere Bedingung herleiten:

$$h_{\mu[\lambda} f_{\sigma]} + f_{\mu} \bar{h}_{\lambda\sigma} + H_{\mu[\sigma;\lambda]} = k_{\mu[\sigma} p_{\lambda]} . \quad (\text{III.78})$$

Hier ist \mathbf{k} ein reines $\hat{\tau}_4$ Objekt, d.h.

$$k_{\mu\nu} p^\mu = k_{\mu\nu} p^\nu = 0 . \quad (\text{III.79})$$

Um \mathbf{k} näher zu bestimmen, permutieren wir die Indizes in Gleichung (III.78) zyklisch, wobei sich \mathbf{k} als eine symmetrische Größe herausstellt:

$$k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu} . \quad (\text{III.80})$$

Der Frobeniusvektor \mathbf{f} koppelt dabei folgendermaßen an den schiefsymmetrischen Teil $\bar{\mathbf{h}}$ von \mathbf{h}

$$f_{[\mu} \bar{h}_{\lambda\sigma]} = 0 . \quad (\text{III.81})$$

Diese Bedingung kann aber nur erfüllt werden, wenn $\bar{\mathbf{h}}$ die Gestalt

$$\bar{h}_{\lambda\sigma} = f_{[\lambda} w_{\sigma]} \quad (\text{III.82})$$

annimmt, wobei \mathbf{w} ein $\hat{\tau}_4$ Schnitt ist

$$w_{\sigma} p^{\sigma} = 0 , \quad (\text{III.83})$$

welcher wie der Frobeniusvektor \mathbf{f} orthogonal zu \mathbf{l} sein muß

$$w_{\mu} l^{\mu} = f_{\mu} l^{\mu} = 0 . \quad (\text{III.84})$$

Die Bi-Vektoren $\mathbf{p} \wedge \mathbf{l}$ und $\mathbf{f} \wedge \mathbf{w}$ sind also, abgesehen von einem skalaren Faktor, dual zueinander.

Fassen wir nun diese Ergebnisse zusammen, so läßt sich der Riemannsche Krümmungstensor \mathbf{R} in einer Form ausdrücken, welche unmittelbar die Symmetrien erkennen läßt, die zur Erfüllung der ersten Bianchi-Identität (III.62.a) notwendig sind:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= \overset{+}{h}_{\mu[\lambda}\overset{+}{h}_{\nu]\sigma} - \overset{-}{h}_{\mu[\lambda}\overset{-}{h}_{\nu]\sigma} \\ &+ 2p_{[\mu}\overset{+}{h}_{\sigma][\nu}f_{\lambda]} + 2p_{[\nu}\overset{+}{h}_{\lambda][\mu}f_{\sigma]} \\ &+ \overset{-}{h}_{\nu\lambda}p_{[\mu}f_{\sigma]} + \overset{-}{h}_{\mu\sigma}p_{[\nu}f_{\lambda]} \\ &+ p_{\mu}p_{[\lambda}k_{\nu]\sigma} - p_{\sigma}p_{[\lambda}k_{\nu]\mu} . \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

Man beachte jedoch, daß *dieses Ergebnis nur im speziellen Fall einer Euklidischen Foliation gilt.*

Als nächstes wollen wir den Einsteinschen Tensor \mathbf{E}

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R G_{\mu\nu} \quad (\text{III.86})$$

untersuchen, da wir diese Größe über die Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Energie-Impuls Tensor \mathbf{T} der Materie verknüpfen können.

$$E_{\mu\nu} = 8\pi L_P^2 T_{\mu\nu} . \quad (\text{III.87})$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein

$$\wp_{\sigma\lambda} := h^\mu{}_\mu \overset{+}{h}_{\sigma\lambda} - \overset{+}{h}^\mu{}_\lambda \overset{+}{h}_{\sigma\mu} - \overset{-}{h}^\mu{}_\lambda \overset{-}{h}_{\sigma\mu} \quad (\text{III.88.a})$$

$$\wp_\lambda := h^\mu{}_\mu f_\lambda - h_{\lambda\mu} f^\mu . \quad (\text{III.88.b})$$

Mit diesen Größen schreibt sich der Einstein-Tensor

$$E_{\sigma\lambda} = -\wp_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}\wp^\mu{}_\mu \mathcal{B}_{\sigma\lambda} + \frac{1}{2}\wp^\mu{}_\mu p_\sigma p_\lambda + k^\mu{}_\mu \mathcal{B}_{\sigma\lambda} - k_{\sigma\lambda} - p_\sigma \wp_\lambda - p_\lambda \wp_\sigma . \quad (\text{III.89})$$

Da unsere Theorie eine universale Zeitrichtung (entlang \mathbf{p}) beinhaltet, definieren wir die Energie \mathcal{E} als

$$\mathcal{E} = T_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{1}{8\pi L_P^2} p^\mu p^\nu E_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi L_P^2} \wp^\mu{}_\mu . \quad (\text{III.90})$$

Eine einfache Rechnung ergibt für die Spur von \wp

$$\begin{aligned} \text{Sp } \wp = \wp^\mu{}_\mu &= h^\mu{}_\mu h^\sigma{}_\sigma - h^{\mu\sigma} h_{\mu\sigma} \\ &= (\text{Sp } \mathbf{h})^2 - (\text{Sp } \mathbf{h}^2) \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Wir fordern hier, daß die Energie positiv sein soll, d.h.

$$(\text{Sp } \mathbf{h})^2 \geq (\text{Sp } \mathbf{h}^2) , \quad (\text{III.92})$$

was eine physikalische Ergänzung der vorausgegangenen geometrischen Bedingungen für den Hubble-Tensor im Falle einer Euklidischen Foliation darstellt.

Kapitel IV

Das klassische Vakuum

Der Vakuumzustand des Universums läßt sich in der herkömmlichen Beschreibung der Gravitation ohne Probleme definieren. Man geht davon aus, daß die Raum-Zeit Mannigfaltigkeit die normale Minkowskische (flache) Geometrie annimmt, wenn alle Materie aus dem Universum entfernt wird. Diese flache Struktur wird nun höchstens etwas durch Gravitationswellen gekrümmt, wobei nach deren Aussterben wieder ein Minkowskischer Raum vorliegt.

Diese Vorstellung scheint nun jedoch etwas zu einfach zu sein: Betrachten wir nämlich die Nullpunktsenergie der verschiedenen elementaren Teilchenfelder, so sollten diese aufgrund der Einsteinschen Feldgleichungen ebenfalls eine Krümmung des Raumes hervorrufen. Es wäre in der Tat nur schwer verständlich, wenn die Nullpunktsenergie den Raum nicht ebenso krümmen würde, wie dies alle anderen Formen von Masse und Energie tun. Aus diesem Grund liegt es nahe, das klassische Vakuum nicht mit einer flachen Minkowski-Struktur zu beschreiben, sondern mit Hilfe eines nicht-trivialen, pseudo-Riemannschen Raumes.

Eine in der Literatur weitverbreitete Vorgehensweise besteht darin, daß man den Einsteinschen Feldgleichungen einen kosmologischen Term hinzufügt

$$E_{\mu\nu} = 8\pi L_P^2 \left({}^{(m)}T_{\mu\nu} + \Lambda_c G_{\mu\nu} \right). \quad (\text{IV.1})$$

Λ_c ist die sogenannte „kosmologische Konstante“. Diese Größe beschreibt die Energie-Impulsdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$ der Nullpunkt-Feldfluktuationen in der klassischen Näherung:

$${}^{(0)}T_{\mu\nu} = \Lambda_c G_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.2})$$

Hier ist ${}^{(0)}\mathbf{T}$ proportional zur Metrik \mathbf{G} , da die Vakuumstruktur eine maximale (d.h. lokale Lorentz-) Symmetrie besitzen muß (\rightsquigarrow de-Sitter-Raum, s.u.).

An diesem Punkt wollen wir nun versuchen, ein leistungsfähigeres Modell zu entwickeln. Wenn das Universum eine nicht-triviale Vakuumstruktur besitzt, muß diese als ein wichtiger dynamischer Bestandteil der Gravitationstheorie angesehen werden. Dies führt uns sofort zu zwei wichtigen Fragen:

- i) Welche dynamischen Gleichungen bestimmen die Vakuumstruktur?
- ii) Wie verändert sich das Vakuum, wenn Materie in das leere Universum hineingebracht wird („Vakuum-Polarisation“)?

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der ersten Frage beschäftigen, während die zweite Frage Gegenstand einer zukünftigen Untersuchung sein wird. Es scheint nun etwas schwierig zu sein, auf der Grundlage der Einsteinschen Gleichungen eine dynamische Struktur des Vakuums zu entwickeln, da zu den Feldgleichungen für den materiefreien Fall (${}^{(m)}\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$) (IV.1) viele Lösungen existieren, wogegen das Vakuum wegen seiner hohen Symmetrie als eindeutig angesehen werden muß. Dies hat zur Folge, daß man aufgrund einer Maximalforderung bezüglich der Symmetrie den Vakuum-Grundzustand aus der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit erst heraussuchen muß. Wir werden jedoch sehen, daß mit Hilfe der neuen Feldgleichungen (II.20.a), (II.20.b) dieses Problem direkter gelöst werden kann. Dazu muß nur die Form der Eichensoren \mathcal{H}_i und \mathcal{F}_i , sowie des Hubble Tensors \mathbf{H} als Funktion der Ätherfelder \mathcal{B}_i und \mathbf{p} festgelegt werden, was aber aufgrund formaler Einschränkungen zu einem nahezu eindeutigen Ergebnis führt. Als Folge ergibt sich die Vakuumdynamik

des Ätherfeldsystems, wobei der Energie-Impulstensor des Vakuums $^{(0)}\mathbf{T}$ mit demjenigen der Ätherfelder $^{(e)}\mathbf{T}$ in ihrer Vakuumkonfiguration identifiziert werden kann. D.h es gilt $^{(0)}\mathbf{T} \equiv ^{(e)}\mathbf{T}|_{vac}$. Diese Annahmen führen zu einem Raum konstanter Krümmung, welcher einer Euklidischen Foliation unterworfen ist. Die ursprüngliche Vorstellung, daß das leere Universum nicht gekrümmt ist bewahrheitet sich also teilweise, da der Vakuum-gekrümmte 4-Raum eine flache 3-Foliation besitzt.

Auf diese Weise können wir mit relativ wenigen und einfachen Annahmen — und vor allem ohne irgendwelche Symmetrieforderungen — einen hochsymmetrischen Grundzustand des klassischen Vakuums definieren (de-Sitter-Universum). Gleichzeitig bietet sich dabei eine Beschreibungsmöglichkeit der angeregten Vakuum-Zustände von niedriger Symmetrie an, indem man den inneren $^{(in)}\mathbf{M}$) und äußeren $^{(ex)}\mathbf{M}$) Feldvariablen gewisse Abweichungen von ihren (konstanten) Grundzustands-Werten erlaubt.

IV.1 Teleparallelismus und Vakuum

Die einfachste Struktur für ein leeres Universum erhalten wir im Falle eines verschwindenden Hubble-Tensors \mathbf{H} und Eichtensors \mathcal{H}_i . Dies wird uns zu einem Raum mit Teleparallelismus führen, das heißt es wird möglich sein im Tangentialbündel der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit eine flache Konnexion einzuführen. Wir werden sehen, daß die Spindichten $^{(B)}\Sigma$ und $^{(p)}\Sigma$ (III.16.a), (III.16.b), sowie die Expansionsrate H (II.26) unter diesen Voraussetzungen identisch verschwinden, so daß sich eine sehr spezielle Struktur der Raum-Zeit ergibt, welche sich als geeignetes Modell für ein leeres Universum anbietet.

Aus den mikroskopischen Gleichungen ersehen wir, daß die Ätherfelder unter

den obigen Annahmen kovariant konstant sind:

$$\nabla_\mu p_\nu = 0 \quad (\text{IV.3.a})$$

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = 0 . \quad (\text{IV.3.b})$$

Setzen wir die Funktion \mathcal{F} (II.22) identisch Null, so ist der Minkowski Raum eine spezielle Lösung dieses Gleichungssystems, wobei sich die Riemannsche Metrik \mathbf{G} auf die Minkowski Metrik $\mathbf{g} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ reduziert und die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ in die (flache) kanonische Konnexion $\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}$ übergeht. Die Komponenten der Ätherfelder können wir ansetzen zu $p_\nu \equiv g^0{}_\nu$, $\mathcal{B}_{i\nu} \equiv g_{i\nu}$. Der Teleparallelismus wird somit trivialerweise realisiert.

Nun existiert jedoch noch eine zweite nichttriviale Lösung von (IV.3.a), (IV.3.b). Aus dem Verschwinden des Hubble-Tensors läßt sich nämlich nicht folgern, daß der Krümmungstensor ebenfalls verschwindet. Betrachten wir Gleichung (III.69), so reduziert sich die 4-Krümmung \mathbf{R} auf die 3-Krümmung $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$: $\mathbf{R} \equiv \overset{\cap}{\mathbf{R}} =: \overset{*}{\mathbf{R}}$. Das bedeutet die 4-Geometrie der Raum-Zeit wird nun zu einer reinen Oberflächengeometrie ($\mathbf{\Gamma} \equiv \overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}} =: \overset{*}{\mathbf{\Gamma}}$) deren Krümmung sich aus Gleichung (III.69) ergibt:

$$\overset{*}{R}_{\sigma\mu\nu\lambda} = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\sigma} \bar{F}_{j\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} . \quad (\text{IV.4})$$

Die charakteristische Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ (III.46) und der Eichvektor \mathbf{C} (III.38) verschwinden dagegen, d.h der Spinfreiheitsgrad der Gravitation ist in diesem Fall nicht angeregt. Die erste Bianchi Identität (III.62.a) muß natürlich für die charakteristische Krümmung erfüllt sein. Wir erhalten somit aufgrund von Gleichung (IV.4) die Bedingung

$$\epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\sigma} \bar{F}_{j[\nu\lambda} \mathcal{B}_{k\mu]} \equiv 0 . \quad (\text{IV.5})$$

Für die weiteren Überlegungen wollen wir uns auf die folgende Lösung der Gleichung (IV.5) beschränken:

$$\bar{F}_{j\nu\lambda} = \zeta \epsilon_j{}^{kl} \mathcal{B}_{k\nu} \mathcal{B}_{l\lambda} , \quad (\text{IV.6})$$

wobei ζ eine skalare Größe ist, welche aufgrund der Bianchi Identität (III.73) konstant sein muß. Wir setzen also

$$\zeta = \frac{\sigma}{\rho^2} \quad (\text{IV.7})$$

$$(\sigma = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1) .$$

Der konstante Längenparameter ρ renormiert die Ätherfelder gemäß

$$B_{i\mu} := \frac{1}{\rho} \mathcal{B}_{i\mu} , \quad (\text{IV.8})$$

so daß die Unterkrümmung $\bar{\mathbf{F}}$ (IV.6) und die charakteristische Krümmung \mathbf{R}^* (IV.4) die folgende Gestalt annehmen

$$\bar{F}_{j\nu\lambda} = \frac{\sigma}{\rho^2} \epsilon_j^{kl} \mathcal{B}_{k\nu} \mathcal{B}_{l\lambda} \quad (\text{IV.9.a})$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda}^* = \frac{\sigma}{\rho^2} (\mathcal{B}_{\sigma\nu} \mathcal{B}_{\lambda\mu} - \mathcal{B}_{\sigma\lambda} \mathcal{B}_{\nu\mu}) . \quad (\text{IV.9.b})$$

Aus der kovarianten Konstanz der Größe \mathcal{B} (IV.3.b) ergibt sich

$$D_\mu B_{i\nu} = D_\nu B_{i\mu} , \quad (\text{IV.10})$$

was wiederum die Gültigkeit der Bianchi Identität für $\bar{\mathbf{F}}$ zu Folge hat.

Wir haben nun eine ganz spezielle Geometrie erhalten, welche wir in Kapitel VI näher untersuchen werden. An dieser Stelle wollen wir nur deren wichtigste Eigenschaften kurz aufzählen: Aufgrund der kovarianten Konstanz der Größe \mathcal{B} (IV.3.b) ergibt sich die Konstanz der \cap_4 Fasermetric \mathcal{B}^2 (vgl.(III.10))

$$\nabla_\lambda^* \mathcal{B}_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{IV.11})$$

Damit ist die Konstanz der Riemannschen Krümmung \mathbf{R}^* gewährleistet

$$\nabla_\rho^* R_{\sigma\mu\nu\lambda}^* = 0 . \quad (\text{IV.12})$$

Diese Gleichung besagt das wir einen (lokal) symmetrischen Raum vorliegen haben. Ferner sehen wir, daß der Weylsche Tensor \mathbf{W} von \mathbf{R}^* verschwindet:

$$W^{\nu\mu}{}_{\kappa\lambda} = \overset{*}{R}{}^{\nu\mu}{}_{\kappa\lambda} - \left(\overset{*}{R}{}^{\nu}{}_{[\kappa} G^{\mu}{}_{\lambda]} - \overset{*}{R}{}^{\mu}{}_{[\kappa} G^{\nu}{}_{\lambda]} \right) + \frac{1}{3} \overset{*}{R} G^{\nu}{}_{[\kappa} G^{\mu}{}_{\lambda]} = 0 . \quad (\text{IV.13})$$

Diese Eigenschaft des Weylschen Tensors ist nun gerade die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer konformal flachen Geometrie. Berechnen wir den Ricci-Tensor nach Gleichung (IV.9.b), so ergibt sich

$$\overset{*}{R}_{\mu\lambda} = \sigma \frac{2}{\epsilon^2} \mathcal{B}_{\mu\lambda} = \frac{1}{3} \overset{*}{R} \mathcal{B}_{\mu\lambda} . \quad (\text{IV.14})$$

Diese Beziehung zwischen dem Ricci Tensor und der Fasermetric \mathcal{B}^2 besagt, daß die $\overset{\cap}{\tau}_4$ Bündelgeometrie von einem dreidimensionalen Einsteinschen Raum herrührt. Nach einem Theorem der Riemannschen Geometrie ist jeder Einsteinsche, konformal flache Raum ein Raum konstanter Krümmung. In unserem Fall erkennt man mit Hilfe der Gleichung (IV.9.b) sofort die Gültigkeit diese Theorems, da dort \mathbf{R}^* , ausgedrückt mit Hilfe der Fasermetric \mathcal{B}^2 , die für einen Raum mit konstanter Krümmung notwendige Gestalt hat. Aus diesem Grund ist die gesamte $\overset{\cap}{\tau}_4$ Bündelgeometrie, welche hier mit der totalen 4-Geometrie der Raum-Zeit übereinstimmt, die Pullback-Geometrie eines Modellraumes mit konstanter Krümmung. Ein Beispiel für solch einen Modellraum ist die dreidimensionale (pseudo-) Sphäre $S^3_{(\sigma)}$. Die Berechnung der Pullback-Geometrie läßt sich leicht bewerkstelligen und wird außerdem die Entstehung einer flachen Konnexion begründen, welche den Teleparallelismus erzeugt.

Diese flache Konnexion, welche wir $\overset{\circ}{\omega}$ nennen wollen, ist folgendermaßen definiert

$${}^{(\sigma)}\overset{\circ}{\omega}_{\mu} = \bar{A}_{i\mu} L^i + B_{i\mu} l^i_{(\sigma)} , \quad (\text{IV.15})$$

wobei $\{L^i, l^i_{(\sigma)}\}$ die Rotations- und Boostgeneratoren der vierdimensionalen Rotationsgruppen

SO(4) bzw. SO(1,3) sind, je nachdem ob σ positiv oder negativ ist:

$$[L^i, L^j] = \epsilon^{ij}_k L^k \quad (\text{IV.16.a})$$

$$[l^i_{(\sigma)}, L^j] = \epsilon^{ij}_k l^k \quad (\text{IV.16.b})$$

$$[l^i_{(\sigma)}, l^j_{(\sigma)}] = \sigma \epsilon^{ij}_k L^k . \quad (\text{IV.16.c})$$

Die Liealgebra-wertige 1-Form ${}^{(\sigma)}\overset{\circ}{\omega}$ (IV.15) wirkt als eine Konnexion im Prinzipalbündel ${}^{(\sigma)}\hat{\lambda}_4$ der ${}^{(\sigma)}g$ -orthonormalen Tetraden $\{\hat{\mathcal{E}}\}$ über der Raum-Zeit mit der Metrik ${}^{(\sigma)}g = \text{diag}(\sigma, -1, -1, -1)$. Für $\sigma = +1$ ist $\hat{\lambda}_4$ identisch mit dem Prinzipalbündel $\overset{\circ}{\lambda}_4$, assoziiert zum Tangentialbündel $\overset{\circ}{\tau}_4$ der Minkowskischen Raum-Zeit. ${}^{(\sigma)}\overset{\circ}{\omega}$ ist eine flache Konnexion, wie durch Berechnen der zugehörigen Krümmung ${}^{(\sigma)}\overset{\circ}{\Omega}$ mit Hilfe der Gleichungen (IV.9.a) und (IV.10) leicht festgestellt werden kann. Aufgrund dieser Tatsache erhalten wir eine eindeutige globale Lösung $\hat{\mathcal{E}}(x)$ der Cartanschen Strukturgleichungen

$$\partial_\mu \hat{\mathcal{E}}_\alpha = \hat{\mathcal{E}}_\beta {}^{(\sigma)}\overset{\circ}{\omega}^\beta_{\alpha\mu} , \quad (\text{IV.17})$$

so daß das Prinzipalbündel ${}^{(\sigma)}\hat{\lambda}_4$ tatsächlich trivial ist und deshalb einen eindeutigen Teleparallelismus definiert. Die Strukturgleichungen (IV.17) können nun nach den Konnexionskoeffizienten \mathbf{A} und \mathbf{B} aufgelöst werden:

$$A_{i\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} \left(\hat{\mathcal{E}}_j \cdot \partial_\mu \hat{\mathcal{E}}_k \right) \quad (\text{IV.18.a})$$

$$B_{i\mu} = - \left(\hat{\mathcal{E}}_i \cdot \partial_\mu \hat{\mathcal{E}}_0 \right) . \quad (\text{IV.18.b})$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich die Gültigkeit der Trivialisierungsbedingungen (IV.9.a) und (IV.10) direkt verifizieren.

Da wir einen globalen Schnitt $\hat{\mathcal{E}}$ von $\hat{\lambda}_4$ jetzt kennen, läßt sich die erste Komponente $\hat{\mathcal{E}}_0 := \hat{\mathbf{n}}$ als ein Schnitt im korrespondierenden (pseudo-) Sphärenbündel ${}^{(\sigma)}g(\hat{n}, \hat{n}) = \sigma$) auffassen, welcher die *Gauß-Abbildung* $[\hat{n}]$ der Raum-Zeit $\mathbf{E}_{1,3}$ auf eine Einheits (pseudo-) Sphäre $S^3_{(\sigma)}$ definiert [11]

$$[\hat{n}] : E_{1,3} \rightarrow S^3_{(\sigma)} . \quad (\text{IV.19})$$

Dieser Schnitt definiert auch die *repräsentative Distribution* $\overline{\Delta}$, welche das repräsentative Bündel $\overline{\tau}_4$ festlegt (vgl. die Untersuchung in [III.1]). $\overline{\tau}_4$ wird durch die Pullback-Abbildung des Tangentialbündels von $S^3_{(\sigma)}$ erzeugt. Es zeigt sich also, daß die Raum-Zeit als Pullback-Geometrie bezüglich der Gauß Abbildung $[\hat{n}]$ von $S^3_{(\sigma)}$ aufgefasst werden kann. Die Fasermetric \mathcal{B}^2 entspricht der ersten Fundamentalform von $S^3_{(\sigma)}$ und hat daher die folgende Gestalt

$$\mathcal{B}^2_{\mu\nu} = \epsilon^2 (\partial_\mu \hat{n}) (\partial_\nu \hat{n}) . \quad (\text{IV.20})$$

Das Linienelement der Raum-Zeit wird somit

$$\begin{aligned} d s^2 &= G^*_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= (p_\mu dx^\mu)^2 + \epsilon^2 (d\hat{\mathbf{n}})^2 \\ &= (d\theta)^2 - \epsilon^2 \begin{cases} (d\kappa)^2 + \sinh^2 \kappa (d\hat{\mathbf{r}})^2, & \sigma = +1 \\ (d\kappa)^2 + \sin^2 \kappa (d\hat{\mathbf{r}})^2, & \sigma = -1 \end{cases} . \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Dabei erzeugt die „Universalzeit“ θ den charakteristischen Vektor \mathbf{p} gemäß

$$p_\mu = \partial_\mu \theta . \quad (\text{IV.22})$$

Der erzeugende Schnitt $\hat{\mathbf{n}}$ wurde folgendermaßen parametrisiert

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{cases} \cosh \kappa \hat{\mathbf{t}} + \sinh \kappa \hat{\mathbf{r}}, & \sigma = +1 \\ \cos \kappa \hat{\mathbf{t}} + \sin \kappa \hat{\mathbf{r}}, & \sigma = -1 , \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

wobei das Linienelement der 2-Sphäre wie gewöhnlich mit Hilfe der sphärischen Polarkoordinaten ϑ, φ ausgedrückt werden kann

$$(d\hat{\mathbf{r}})^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 . \quad (\text{IV.24})$$

In dieser Form verwendet man das Linienelement (IV.21) im „Standardmodell“ der Kosmologie [23]. Es beschreibt ein geschlossenes ($\sigma = -1$) bzw. offenes ($\sigma = +1$) Universum, das mit der Topologie $R^1 \otimes S^3_{(\sigma)}$ ausgestattet ist. Es gibt jedoch

einen wichtigen Unterschied: in unserem Fall ist der Radius ρ der (pseudo-) Sphäre konstant, wogegen im Standardmodell der Radius einer bestimmten Bewegungsgleichung unterworfen ist, welche aus den Einsteinschen Gleichungen abgeleitet werden kann und die Entwicklung des Universums beschreibt. Das unrealistische Verhalten unseres Modells beruht auf der Wahl eines verschwindenden Hubble-Tensors \mathbf{H} (vgl. (IV.3.a)). Es ist nun trotzdem interessant, den Energie-Impulstensor \mathbf{T} dieses Modelluniversums mit Hilfe der Einsteinschen Gleichungen (III.87) zu untersuchen. Der Einstein Tensor $\overset{*}{\mathbf{E}}$ (III.86) läßt sich mit Hilfe des Ricci Tensors (IV.14) folgendermaßen ausdrücken

$$\overset{*}{E}_{\mu\nu} = -\frac{\sigma}{\rho^2} (\mathcal{B}_{\mu\nu} + 3p_{\mu}p_{\nu}) . \quad (\text{IV.25})$$

Dieser Einstein Tensor erzeugt einen Energie-Impuls von der Form wie ihn eine ideale Flüssigkeit besitzt

$$^{(\text{id})}T_{\mu\nu} = \mathcal{M}p_{\mu}p_{\nu} - \mathcal{P}\mathcal{B}_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.26})$$

Dabei sind der Druck \mathcal{P} und die Massen-Energiedichte wie folgt verknüpft

$$\overset{*}{\mathcal{P}} = -\frac{1}{3} \overset{*}{\mathcal{M}} . \quad (\text{IV.27})$$

Abgesehen von dem unphysikalischen Minuszeichen ist dies die Zustandsgleichung für ein ideales Gas von masselosen Teilchen. Trotz des etwas unrealistischen Verhaltens des Modelluniversums erkennt man den Einfluß der reinen 3-Geometrie auf den Energie-Impulsinhalt der Raum-Zeit, welcher in der Erzeugung von Druck $\overset{*}{\mathcal{P}}$ und Energiedichte $\overset{*}{\mathcal{M}}$ besteht:

$$\overset{*}{\mathcal{P}} = \frac{\sigma}{8\pi L_P^2 \rho^2} \quad (\text{IV.28.a})$$

$$\overset{*}{\mathcal{M}} = -\frac{3\sigma}{8\pi L_P^2 \rho^2} . \quad (\text{IV.28.b})$$

Unser Modell ist aber aus einem weiteren Grund physikalisch nicht akzeptabel. Aufgrund des Auftretens des charakteristischen Vektors \mathbf{p} im Vakuumtensor (IV.26) wird ein spezielles Lorentzbezugssystem ausgezeichnet! Zwar ist gegen das Auftauchen eines solchen Bezugssystems im Falle des Vorhandenseins von Materie nichts einzuwenden, denn wir können mit Hilfe der Materieverteilung ein solches Bezugssystem sicher errichten, jedoch muß der Vakuumzustand des Universums lokal die volle Lorentzsymmetrie besitzen und somit kann der Vakuum Energie-Impulstensor nur proportional zur Metrik \mathbf{G} sein. Mit anderen Worten: die Foliation darf nicht explizit im Energie-Impulstensor auftauchen. Wir werden sehen, daß sich dies in der Tat erreichen läßt, wenn die 4-Krümmung \mathbf{R} (III.69) ausschließlich durch die *extrinsische* Krümmung der charakteristischen Flächen erzeugt wird. D.h wir werden den Fall einer Euklidischen Foliation untersuchen. Da der Vakuumzustand hochsymmetrisch sein muß, werden wir ihn, wie im obigen Beispiel, mit der Pullback-Geometrie einer 3-(pseudo) Sphäre $S^3_{(\sigma)}$ ausstatten. $S^3_{(\sigma)}$ ist parallelisierbar und deshalb wollen wir versuchen eine Verallgemeinerung innerhalb dieser speziellen Klasse von Räumen zu finden.

IV.2 Parallelisierbare Räume

Um eine hinreichend allgemeine Klasse von parallelisierbaren Raum-Zeiten zu finden, kombinieren wir die Gleichungen (III.41) (III.46):

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = -p_\nu H^\lambda{}_\mu \mathcal{B}_{i\lambda} \quad (\text{IV.29})$$

und wählen dann den reduzierten Hubble-Tensor \mathbf{h} (III.47.a) zu

$$h_{\mu\nu} = -\frac{1}{l} \mathcal{B}_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.30})$$

Damit erhalten wir für (IV.29) einen einfacheren Ausdruck

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} = \frac{1}{l} \mathcal{B}_{i\mu} p_\nu - \varphi_i p_\mu p_\nu . \quad (\text{IV.31})$$

Die Länge l ist eine Raum-Zeit Funktion und der Higgsskalar φ das $\bar{\tau}_4$ Bild des $\overset{\cap}{\tau}_4$ Schnittes \mathbf{f} (Frobenius Vektor) bezüglich des Bündelisomorphismus $[B]$ (III.27.a), (III.27.b).

$$\varphi_i = \mathcal{B}_{i\mu} f^\mu . \quad (\text{IV.32})$$

Aufgrund der Symmetrie des reduzierten Hubble-Tensors \mathbf{h} (IV.30) können wir einen integrierenden Faktor λ einführen, so daß eine Universalzeit θ existiert:

$$\partial_\mu \theta = \lambda p_\mu . \quad (\text{IV.33})$$

Wir definieren nun den *Radius* \mathcal{R} ($= \mathcal{R}(\theta)$) des Universums als Funktion der Universalzeit θ durch

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{l\lambda} \equiv \frac{H}{\lambda} . \quad (\text{IV.34})$$

Das ermöglicht es uns, die Ätherfelder \mathbf{B} umzuskalieren

$$B_{i\mu} := \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}_{i\mu} , \quad (\text{IV.35})$$

wobei deren Ableitung symmetrisch wird

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu B_{i\nu} = \frac{1}{l\lambda\mathcal{R}} [\mathcal{B}_{i\mu}(\partial_\nu \theta) + \mathcal{B}_{i\nu}(\partial_\mu \theta)] - \frac{1}{\mathcal{R}} \varphi_i p_\mu p_\nu , \quad (\text{IV.36})$$

d.h.

$$\bar{D}_\mu B_{i\nu} - \bar{D}_\nu B_{i\mu} = 0 . \quad (\text{IV.37})$$

Im vorangehenden Beispiel (IV.3.a), (IV.3.b) wurde schon erwähnt, daß die Gleichung (IV.37) die eine Hälfte der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer trivialen Konnexion $^{(\sigma)}\overset{\circ}{\omega}$ für das Prinzipalbündel $^{(\sigma)}\hat{\lambda}_4$ darstellt. Wir können deshalb diese Bedingung durch Hinzunahme der entsprechenden anderen Hälfte vervollständigen

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = \sigma \epsilon_i^{jk} B_{j\mu} B_{k\nu} . \quad (\text{IV.38})$$

Damit ist automatisch die Bianchi Identität erfüllt

$$\bar{\mathcal{D}}_\lambda \bar{F}_{i\mu\nu} + \bar{\mathcal{D}}_\mu \bar{F}_{i\nu\lambda} + \bar{\mathcal{D}}_\nu \bar{F}_{i\lambda\mu} = 0 . \quad (\text{IV.39})$$

Die Argumentation, welche von (IV.15) nach (IV.21) geführt hat, läßt sich natürlich auch auf unser vorliegendes Beispiel anwenden. Der Radius des Universums ist jetzt aber eine Funktion der Universalzeit θ . Das Linienelement (IV.21) verallgemeinert sich deshalb zu

$$ds^2 = \left(\frac{d\theta}{\lambda} \right)^2 - \mathcal{R}^2(\theta) \begin{cases} (d\kappa)^2 + \sinh^2 \kappa (d\hat{\mathbf{r}})^2, & \sigma = +1 \\ (d\kappa)^2 + \sin^2 \kappa (d\hat{\mathbf{r}})^2, & \sigma = -1 . \end{cases}$$

Um zu einer Form des Linienelementes zu gelangen, wie man sie in der Standardkosmologie findet, benützen wir einen verschwindenden Frobeniusvektor ($\mathbf{f} \equiv 0$), so daß sich λ auf 1 reduziert.

Wir kombinieren nun die $S^3_{(\sigma)}$ Pullback-Geometrie mit der Bedingung für eine Euklidische Foliation, um eine physikalisch akzeptable Vakuumstruktur für das leere Universum zu erhalten.

IV.3 Euklidische Foliation

Die Euklidischen Foliation ist nicht nur rein formal interessant, sondern besitzt auch einen wichtigen philosophischen Aspekt. Akzeptiert man die Tatsache, daß die Gravitationsselbstwechselwirkungen im Vakuumzustand, ebenso wie alle anderen Wechselwirkungen, einen bestimmten Energie-Impulsbetrag ${}^{(e)}\mathbf{T}$ besitzen, so läßt sich ${}^{(e)}\mathbf{T}$ in die rechte Seite der Einsteinschen Feldgleichungen einsetzen. Wir erhalten dann ein inhomogenes Gleichungssystem, welches das leere Universum (den klassischen Vakuumzustand) bestimmt

$$E_{\mu\nu} = 8\pi L_P^2 {}^{(e)}T_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.40})$$

In diesem Fall kann der Vakuumzustand aber nicht mit dem flachen Minkowski Raum ($E_{\mu\nu} \equiv 0$) der Einsteinschen Theorie übereinstimmen. Der Vakuumzustand muß deshalb mit einer nicht-trivialen Riemannschen Geometrie ausgestattet sein!

Jedoch sollte aufgrund der besonderen Rolle der Gravitationswechselwirkungen ein gewisser Unterschied existieren in der Art und Weise, wie die Vakuumenergie den Raum im Vergleich zu normaler Materie krümmt. Eine Lösung dieses Problems besteht darin, das Vakuum der Raum-Zeit durch die Gravitationskräfte so krümmen zu lassen, daß die charakteristischen 3-Flächen flach bleiben. Mit anderen Worten, die Gleichung (III.40) muß gelten. Ist nun Materie vorhanden, so müssen die Einsteinschen Gleichungen eine Lösung ergeben, welche die charakteristische Krümmung $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$ (III.68) ausschließlich auf den Einfluß realer Materie zurückführt. Wir werden später ein Beispiel hierfür angeben, aber zuerst wollen wir den physikalisch richtigen Vakuumzustand für den Fall finden, daß nur die Ätherfelder im Universum vorhanden sind.

Für die Vakuumform ${}^{(0)}\mathcal{H}_i$ der Funktion \mathcal{H}_i machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} {}^{(0)}\mathcal{H}_{i\mu\lambda} &= \frac{1}{l} \mathcal{B}_{i\lambda} p_\mu + \frac{1}{L} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \\ (l, L &= \text{const.}) . \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Der Hubble-Tensor \mathbf{H} wird sodann nach Gleichung (II.25)

$${}^{(0)}H_{\mu\nu} = -\frac{1}{l} \mathcal{B}_{\mu\lambda} . \quad (\text{IV.42})$$

Durch Vergleich von (IV.41) und (IV.42) erkennen wir den Unterschied in der Bedeutung der Längenparameter L und l : Der Hubble-Tensor \mathbf{H} (IV.42) enthält die Länge L nicht. Aus diesem Grund ist L ein äußerer Parameter des Gravitationsfeldes, wogegen l die Bedeutung eines inneren Parameters hat. Wir sehen, daß die Symmetrie von \mathbf{H} , genauso wie im zuvor untersuchten Modell, die Existenz einer Universalzeit θ (IV.33) garantiert. Wir können deshalb in Gleichung (IV.33) $\lambda \equiv 1$ setzen. Um die vollständige Vakuumdynamik zu erhalten, machen wir für die Funktion \mathcal{F}_i (II.22) den folgenden Ansatz

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i\mu\nu} &= f_{||} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + 2f_{\perp} \mathcal{B}_{i[\mu} p_{\nu]} \\ (f_{||}, f_{\perp} &= \text{const.}) . \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

Die Bianchi Identität (II.23) lautet somit

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \mathcal{D}_\lambda \mathcal{F}_{i\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{i\nu\lambda} + \mathcal{D}_\nu \mathcal{F}_{i\lambda\mu} \\ &= 2 \left(\frac{f_\perp}{L} - \frac{f_\parallel}{l} \right) \epsilon_i^{jk} (p_\lambda \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + p_\mu \mathcal{B}_{j\nu} \mathcal{B}_{k\lambda} + p_\nu \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu}) . \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

Die Längenparameter $\{f_\parallel, f_\perp\}$ müssen daher folgendermaßen mit den Größen $\{l, L\}$ verknüpft sein

$$\frac{f_\parallel}{l} = \frac{f_\perp}{L} . \quad (\text{IV.45})$$

Der Riemannsche Krümmungstensor \mathbf{R} (III.85) unseres Modelluniversums ((IV.41) - (IV.43)) läßt sich leicht berechnen, wenn wir berücksichtigen, daß der Frobeniusvektor \mathbf{f} (III.47.a) und der schief-symmetrische Teil $\bar{\mathbf{h}}$ (III.48.c) des Hubble-Tensors \mathbf{H} identisch verschwinden. Für den symmetrische Tensor \mathbf{k} (III.78) erhalten wir dagegen

$${}^{(0)}k_{\mu\nu} = \frac{1}{l^2} \mathcal{B}_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.46})$$

Daraus bestimmt sich \mathbf{R} zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} {}^{(0)}R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= h_{\mu[\lambda}^+ h_{\nu]\sigma}^+ + p_\mu p_{[\lambda} k_{\nu]\sigma} - p_\sigma p_{[\lambda} k_{\nu]\mu} \\ &= \frac{1}{l^2} G_{\mu[\lambda} G_{\nu]\sigma} . \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

Die Vakuumgeometrie wird also durch einen Raum mit konstanter Krümmung realisiert, welcher nach den mikroskopischen Feldgleichungen

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{B}_{i\mu} = \frac{1}{l} \mathcal{B}_{i\lambda} p_\mu + \frac{1}{L} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \quad (\text{IV.48})$$

$$\nabla_\lambda p_\mu = -\frac{1}{l} \mathcal{B}_{\mu\lambda} \quad (\text{IV.49})$$

in die charakteristischen 3-Flächen zerlegt ist.

Als nächstes wollen wir uns davon überzeugen, daß dies eine Euklidische Foliation ist. Dazu berechnen wir den Eichvektor \mathbf{C} (III.38) und erhalten

$${}^{(0)}C_{i\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\sigma} {}^{(0)}\mathcal{H}_k{}^\sigma{}_\mu = -\frac{1}{L} \mathcal{B}_{i\mu} . \quad (\text{IV.50})$$

Mit Hilfe von Gleichung (III.39) ergibt sich für die intrinsische Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ des repräsentativen Bündels $\bar{\tau}_4$ der folgenden Ausdruck

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = \left(f_{\parallel} - \frac{1}{L^2}\right) \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + \left(f_{\perp} - \frac{1}{lL}\right) (\mathcal{B}_{i\mu} p_{\nu} - \mathcal{B}_{i\nu} p_{\mu}) . \quad (\text{IV.51})$$

Die charakteristischen 3-Flächen besitzen also genau dann eine Euklidische Geometrie ($\bar{\mathbf{F}} \equiv 0$), wenn wir verlangen

$$f_{\parallel} = \frac{1}{L^2} \quad (\text{IV.52.a})$$

$$f_{\perp} = \frac{1}{lL} . \quad (\text{IV.52.b})$$

Die Funktion \mathcal{F} (IV.43) wird damit

$${}^{(0)}\mathcal{F}_{i\mu\nu} = \frac{1}{L^2} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + \frac{1}{lL} (\mathcal{B}_{i\mu} p_{\nu} - \mathcal{B}_{i\nu} p_{\mu}) . \quad (\text{IV.53})$$

Fassen wir zusammen: Der klassische Vakuumzustand des Universums ist ein Raum konstanter Krümmung (IV.47), welcher nach den mikroskopischen Gleichungen (IV.48) und (IV.49) sowie nach (IV.53) in flache 3-Hyperflächen zerlegt wird (*Euklidische Foliation*). Der korrespondierende Einstein-Tensor ${}^{(0)}\mathbf{E}$ ergibt sich nach Gleichung (III.89) zu

$${}^{(0)}E_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2} G_{\mu\nu} \quad (\text{IV.54})$$

woraus wir mit Hilfe der Vakuum-Einsteingleichungen

$${}^{(0)}E_{\mu\nu} = 8\pi L_P^2 {}^{(0)}T_{\mu\nu} \quad (\text{IV.55})$$

einen nichtverschwindenden Vakuum Energie-Impulstensor ${}^{(0)}\mathbf{T}$ erhalten

$${}^{(0)}T_{\mu\nu} = \frac{3}{8\pi L_P^2 l^2} G_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.56})$$

Dieser Energie-Impulstensor ist physikalisch akzeptabel, da in ihm der charakteristische Vektor \mathbf{p} , welcher den Ätherfluß beschreibt, nicht auftaucht. Mit anderen Worten, der Ätherwind ist nicht meßbar! Trotzdem taucht nun die Frage auf woher der

nichtverschwindende Energie-Impulstensor herrührt. Da die Ätherfelder die einzigen Objekte sind, welche im materiefreien Universum existieren, sind sie es, die den Energie-Impulsinhalt des Vakuums erzeugen. Wir werden diese Annahme sogleich beweisen, vorher wollen wir jedoch die Ätherspindichte untersuchen.

Die charakteristische Kontorsion $\overset{\cap}{\mathbf{K}}$ läßt sich leicht aus Gleichung (III.46) bestimmen:

$$\overset{\cap}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{l} (p^\lambda \mathcal{B}_{\mu\nu} - p_\mu \mathcal{B}^\lambda{}_\nu) . \quad (\text{IV.57})$$

Daraus erhalten wir unmittelbar für die charakteristische Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ (III.47) den Ausdruck

$$\overset{\cap}{Z}{}^\sigma{}_{\nu\lambda} = -\frac{1}{l} \mathcal{B}^\sigma{}_{[\nu} p_{\lambda]} , \quad (\text{IV.58})$$

welcher verträglich ist mit dem Oberflächentheorem (III.1.b), (III.1.c). Die relative Kontorsion $\overset{\cup}{\mathbf{K}}$ dagegen reduziert sich zu einer reinen Oberflächengröße, welche mit der relativen Torsion $\overset{\cup}{\mathbf{Z}}$ übereinstimmt:

$$\begin{aligned} \overset{\cup}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \overset{\cup}{K}{}^\lambda{}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{L} \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_i{}^\lambda \mathcal{B}_{j\nu} \mathcal{B}_{k\mu} \\ &\equiv -\frac{1}{L} {}^*p^\lambda{}_{\nu\mu} . \end{aligned} \quad (\text{IV.59})$$

Die gesamte Spindichte $\Sigma = {}^{(p)}\Sigma + {}^{(B)}\Sigma$ stimmt mit dem Poincarédual ${}^*\mathbf{p}$ des charakteristischen Vektorfeldes \mathbf{p} überein

$$\Sigma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2\pi L} {}^*p_{\mu\nu\lambda} . \quad (\text{IV.60})$$

Damit erhalten wir eine sehr einfache Beziehung zwischen der relativen Torsion $\overset{\cup}{\mathbf{Z}}$ und dem Spin Σ

$$\overset{\cup}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = 2\pi \Sigma^\lambda{}_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.61})$$

Dieses bemerkenswerte Ergebnis besagt, daß die flachen 3-Hyperflächen mit einer nicht-trivialen Oberflächentorsion ausgestattet sind, welche für $L \rightarrow \infty$ verschwindet, wobei wir ebenfalls $l \rightarrow \infty$ gesetzt haben (vgl. weiter unten). Die Vakuumdynamik

(IV.48), (IV.49) wird in diesem Grenzfall trivial und die Riemannsche Vakuumstruktur reduziert sich zum flachen Minkowski Raum. Wir sehen also, daß der Spinparameter L für die kompliziertere Vakuumstruktur verantwortlich ist.

IV.4 Die Vakuumenergie

Die Vakuumdynamik (IV.48), (IV.49) und (IV.53) ist der Ausgangspunkt für die Definition der entsprechenden Vakuum Energie-Impulsdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$. Wir werden natürlich die Vakuumdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$ mit dem Energie-Impulsinhalt ${}^{(e)}\mathbf{T}$ der Ätherfelder in der Vakuumkonfiguration identifizieren. Um den Energie-Impulstensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ in einer beliebigen Ätherkonfiguration zu erhalten, liegt es nahe den kanonischen Formalismus anzuwenden. Wenn das Ätherfeldsystem im flachen Raum bekannt wäre, könnte man es dann mit Hilfe des Äquivalenzprinzips, welches für Gleichungen erster Ordnung gilt, in den gekrümmten Raum übertragen. Leider funktioniert dies in unserem Fall nicht, da das Gleichungssystem erster Ordnung (IV.48), (IV.49) und (IV.53) im flachen Raum inkonsistent ist. Der Grund liegt darin, daß es die Riemannsche Struktur der Raum-Zeit eindeutig bestimmt (vgl. auch III). Wir müssen deshalb zuerst ein System von Gleichungen zweiter Ordnung aus der Vakuumdynamik konstruieren. Auf dieses Gleichungssystem wenden wir dann den kanonischen Formalismus im flachen Raum an und erhalten so den Energie-Impulsinhalt ${}^{(e)}\mathbf{T}$ der Ätherfelder.

Durch eine weitere Differentiation des Systems (IV.48), (IV.49) erreichen wir eine Entkopplung der Feldvariablen:

$$\nabla_\lambda \nabla^\lambda p_\mu = -\frac{3}{l^2} p_\mu \quad (\text{IV.62.a})$$

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}^\lambda \mathcal{B}_{i\mu} = -\frac{1}{\mathcal{L}^2} \mathcal{B}_{i\mu} \quad (\text{IV.62.b})$$

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}^2} := \frac{1}{l^2} - \frac{2}{L^2} \right).$$

Die Divergenz des Feldstärketensors ${}^{(0)}\mathcal{F}$ (IV.53) ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\mu {}^{(0)}\mathcal{F}_{i\mu\nu} &= -\epsilon_i{}^{jk} {}^{(0)}B_{j\mu} \left(\mathcal{D}_\nu {}^{(0)}B_k{}^\mu \right) \\ \left({}^{(0)}B_{i\mu} \right) &:= \frac{1}{L} \left(1 + \frac{L^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{B}_{i\mu} \equiv \epsilon^{-1} \mathcal{B}_{i\mu}\end{aligned}\tag{IV.63}$$

und schließt das Gleichungssystem zweiter Ordnung. Diese Gleichungen vom Klein-Gordon bzw. Yang-Mills-Higgs Typ sind nun formal entkoppelt und würden in einer quantisierten Version dieser Theorie die Existenz von Spin-1 Teilchen nach sich ziehen, welche die Bestandteile des Äthers sind. Ein Teilchen dieser Art wollen wir „*Gravon*“ nennen. Die typische Gravonmasse läßt sich aus Gleichung (IV.62.a) herleiten:

$$m_G = \sqrt{3} \frac{\hbar}{|l|c} .\tag{IV.64}$$

Interessant hierbei ist, daß diese Massenformel die Trägheits-Eigenschaft eines Elementar-Teilchens mit einer globalen Eigenschaft der Raum-Zeit verknüpft, nämlich mit der Hubble-Konstanten H (vgl. (IV.34)). Eine Beziehung dieser Art ist unter dem Begriff *Mach'sches Prinzip* bekannt! Benützen wir den heutigen Wert für die Hubble-Konstante

$$H \equiv \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{l} \approx \frac{1}{1.7 \cdot 10^{28}[\text{cm}]} ,\tag{IV.65}$$

so ergibt sich für das Gravon eine Masse von

$$m_G \approx 3 \cdot 10^{-66}[\text{g}] \approx 10^{-39} m_{el} .\tag{IV.66}$$

D.h das Gravon ist praktisch masselos. Wie man der Klein-Gordongleichung (IV.62.b) entnehmen kann, muß der Längenparameter l immer kleiner als der Spinparameter L sein damit wir einen reellen Wert für die Gravonmasse erhalten. Aus den Gleichungen zweiter Ordnung für die Vakuumdynamik (IV.62.a), (IV.62.b) und (IV.63) können wir nun mit Hilfe des kanonischen Formalismus den korrespondierenden Energie-

Impulstensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ für das gesamte Ätherfeldsystem konstruieren: ¹

$${}^{(e)}T_{\mu\nu} = {}^{(p)}T_{\mu\nu} + {}^{(B)}T_{\mu\nu} + {}^{(F)}T_{\mu\nu} \quad (\text{IV.67.a})$$

$${}^{(p)}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (\nabla_\mu p_\lambda) (\nabla_\nu p^\lambda) - G_{\mu\nu} \Lambda_p \quad (\text{IV.67.b})$$

$${}^{(B)}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} (\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\lambda}) (\mathcal{D}_\nu \mathcal{B}^{i\lambda}) - G_{\mu\nu} \Lambda_B \quad (\text{IV.67.c})$$

$${}^{(F)}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}^i{}_{\mu\lambda} \mathcal{F}_{i\nu}{}^\lambda - G_{\mu\nu} \Lambda_{\mathcal{F}} , \quad (\text{IV.67.d})$$

mit den folgenden Ausdrücken für die Lagrangedichten Λ

$$\Lambda_p = \frac{1}{8\pi} \left[(\nabla^\mu p^\nu) (\nabla_\mu p_\nu) - \frac{3}{l^2} p^\mu p_\mu \right] \quad (\text{IV.68.a})$$

$$\Lambda_B = -\frac{1}{8\pi} \left[(\mathcal{D}^\mu \mathcal{B}^{i\nu}) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{B}_{i\nu}) - \frac{1}{\mathcal{L}^2} \mathcal{B}^{i\mu} \mathcal{B}_{i\mu} \right] \quad (\text{IV.68.b})$$

$$\Lambda_{\mathcal{F}} = \frac{1}{16\pi} \mathcal{F}_{i\mu\nu} \mathcal{F}^{i\mu\nu} . \quad (\text{IV.68.c})$$

Ersetzen wir hier die Ableitungen erster Ordnung der Ätherfelder durch die aus der Vakuumdynamik (IV.48) und (IV.49) folgenden Ausdrücke und den Eichtensor \mathcal{F} durch Gleichung (IV.53), dann wird die Ätherdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$

$${}^{(e)}T_{\mu\nu} = \frac{3}{8\pi} \frac{1 + \frac{L^2}{l^2}}{L^4} G_{\mu\nu} . \quad (\text{IV.69})$$

Für das Vakuum sind nun die Ätherdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ und die Vakuumdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$ (IV.56) identisch. Aufgrund dieser Identifikation erhalten wir die folgende Bedingung für die Längenparameter $\{l, L\}$:

$$L_P^2 = L^2 \frac{L^2}{L^2 + l^2} . \quad (\text{IV.70})$$

Dieser Ausdruck ist eine Bestimmungsgleichung für den Spinparameter L als Funktion des inneren Parameters l .

Werden beide Längenparameter $\{l, L\}$ unendlich, so verschwinden die Ätherdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (IV.69) genauso wie der Vakuum Einstein-Tensor ${}^{(0)}\mathbf{E}$ (IV.54) und die Einsteingleichungen

¹Eine ausführliche Ableitung findet sich in Kapitel V

(IV.40) sind trivialerweise erfüllt. Es liegt dann ein triviales Vakuum (Minkowskische Raum-Zeit) vor. Ein endlicher Wert von l erzwingt jedoch aufgrund der Einsteingleichungen (IV.40) ebenfalls einen endlichen Wert für L . Wir sehen also, daß die Existenz eines nichttrivialen Vakuums von der klassischen Anregung eines Spinfreiheitsgrades des Ätherfeldes herrührt!

Physikalisch gesehen wird das nichttriviale Vakuum durch das folgende Linienelement charakterisiert ($\theta \equiv t$):

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\mathcal{R}(t)}{\mathcal{R}_*} \right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (\text{IV.71})$$

Den Radius \mathcal{R} des Universums erhalten wir durch Integration der Hubble-Konstanten (IV.34) ($\lambda = 1$)

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(t_*) \exp \left(-\frac{t - t_*}{l} \right) . \quad (\text{IV.72})$$

Das Universum ist also offen und expandiert ($l < 0$) bzw. kontrahiert ($l > 0$) exponentiell bezüglich eines Referenzzeitpunktes t_* . Da die Energiedichte ${}^{(0)}\mathcal{U}$ des Vakuums konstant ist (vgl. (IV.69)), gilt

$${}^{(0)}\mathcal{U} := {}^{(0)}T_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{3}{8\pi L^2 c^2} . \quad (\text{IV.73})$$

Die Energie, welche sich in einem 3-Volumen $V = \mathcal{R}^3$ befindet, nimmt exponentiell ab bzw. zu

$${}^{(0)}U = {}^{(0)}\mathcal{U} \cdot V = \frac{3\mathcal{R}_*^3}{8\pi L^2 c^2} \exp \left(-3 \frac{t - t_*}{l} \right) . \quad (\text{IV.74})$$

Die Arbeit $\delta\mathcal{A}$, welche an dem 3-Volumen V durch den Vakuumdruck ${}^{(0)}\mathcal{P}$

$${}^{(0)}\mathcal{P} = -{}^{(0)}\mathcal{U} = -\frac{3}{8\pi L^2 c^2} \quad (\text{IV.75})$$

verrichtet wird, beträgt

$$\delta\mathcal{A} = -{}^{(0)}\mathcal{P} \delta V = +{}^{(0)}\mathcal{U} \delta V . \quad (\text{IV.76})$$

Demnach ist das Energieerhaltungsgesetz erfüllt

$$\frac{d^{(0)}U}{dt} - \frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0 . \quad (\text{IV.77})$$

D.h die Expansion bzw. Kontraktion des Vakuums ist adiabatisch.

In der Literatur wird die vorliegende Vakuum-Konfiguration als „*deSitter-Universum*“ bezeichnet. In der herkömmlichen Gravitationstheorie [23] beschreibt diese Konfiguration eine Lösung der modifizierten Einstein-Gleichungen (IV.1) für ein leeres Universum ($^{(m)}\mathbf{T} \equiv 0$), welches eine nicht-verschwindende kosmologische Konstante besitzt ($\Lambda_c \neq 0$). Dabei werden folgende Annahmen gemacht:

- i) Das Universum expandiert bzw. kontrahiert stetig und
- ii) sieht für alle Beobachter, die sich mit der kosmologischen Flüssigkeit mitbewegen, immer gleich aus. Dabei spielt der Standort und der Zeitpunkt der Beobachtung keine Rolle („*perfektes kosmologisches Prinzip*“)

Innerhalb der vorliegenden mikroskopischen Gravitationstheorie ist diese konventionelle Betrachtungsweise jedoch höchst fragwürdig: Das deSitter-Universum wird, wie oben erwähnt, als ein leeres Universum betrachtet. Es existiert keine kosmologische Flüssigkeit, welche als Bezugssystem für einen hypothetischen Beobachter benützt werden kann. Die einzige Behauptung die man aufstellen kann, ist die, daß das deSitter-Universum spezielle Klassen von Beobachtern *zuläßt*, für welche das Universum, wie in i) und ii) aufgeführt, erscheint. (\rightsquigarrow Euklidische Foliation des deSitter-Universums). Die verschiedenen Klassen lassen sich durch einen $SO(1,4)$ -Boost, welcher auf den einbettenden 5-dimensionalen pseudo-Euklidischen Raum $\mathbf{E}_{1,4}$ wirkt, ineinander überführen. Das deSitter-Universum wird dabei als 4-dimensionale pseudo-Sphäre in $\mathbf{E}_{1,4}$ eingebettet.

Die mathematische Auswahl eines speziellen Beobachters aufgrund von Symmetrieüberlegungen scheint vom physikalischen Standpunkt doch etwas unmotiviert zu sein. In unserer

mikroskopischen Theorie ist dieser Schwachpunkt jedenfalls nicht vorhanden, da diese auf dem Postulat aufgebaut ist, daß die Raum-Zeit spontan in Zeitrichtung ($\mathbf{p} = \mathbf{d}\theta$) und einen 3-dimensionalen Raum ($\overset{\cap}{\Delta}$) aufspaltet, wobei die mikroskopische Dynamik (IV.48) und (IV.49) der Raum-Zeit *automatisch* eine deSitter-Struktur mit Euklidischer Foliation auferlegt. Aus diesem Grund benötigen wir die zwei Forderungen i) und ii) nicht, um in unserer Theorie den Vakuumzustand zu definieren. Der Vakuumzustand wird vielmehr durch Wahl der Objekte \mathcal{H}_i und \mathbf{H} (IV.41), (IV.42) eindeutig festlegt. Diese einfachste Wahl bietet sich von selbst an, wenn wir uns ins Gedächtnis rufen, daß außer den Ätherfeldern \mathcal{B}_i , \mathbf{p} keine anderen Größen zur Konstruktion der Objekte \mathcal{H}_i , \mathbf{H} im leeren Universum vorhanden sind.

Fassen wir zusammen. Wir haben gezeigt, daß die mikroskopische Dynamik (IV.48), (IV.49) und (IV.53) eine Riemannsche Struktur der Raum-Zeit liefert, welche alle Eigenschaften eines klassischen Vakuums besitzt:

- i) Die Raum-Zeit Geometrie ist hochsymmetrisch (Symmetriegruppe: $\text{SO}(1,4)$) und wird durch einen parallelisierbaren Riemannschen Raum konstanter Krümmung erzeugt. Anzahl der Symmetrie-Operationen: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$
- ii) Der Vakuumgrundzustand ist eindeutig und seine Energie-Impulsdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$ ist proportional zur Metrik \mathbf{G} .
- iii) Die Vakuumdichte ${}^{(0)}\mathbf{T}$ läßt sich mit der kanonischen Energie-Impulsdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ der Ätherfelder identifizieren.
- iv) Da die Ätherfelder die Bestandteile der Riemannschen Metrik \mathbf{G} sind, können wir die Ätherdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ ebenfalls mit dem Energie-Impuls der Gravitationskräfte identifizieren. Letztere erzeugen dann nach den Einsteinschen Gleichungen (IV.40) die Raumkrümmung in *fast* der gleichen Art und Weise wie die übrige Materie. Der Unterschied besteht darin, daß der Energie-Impulstensor

der Gravitation die charakteristischen Flächen nicht *intrinsisch* sondern nur *extrinsisch* krümmt!

IV.5 Vakuum-Anregungen

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, daß der Grundzustand des klassischen Vakuums, innerhalb der mikroskopischen Gravitationstheorie, eine dynamische Rolle spielt. Die nächste Frage, die sich nun unmittelbar stellt, muß sich daher auf mögliche Abweichungen vom Vakuum-Grundzustand beziehen. (Quantenfeldtheoretisch gesehen würden solche angeregte Zustände einer nichtverschwindenden Anzahl von Gravonen entsprechen). Diese Abweichungen vom Grundzustand besitzen nicht mehr die hohe Symmetrie des Grundzustandes, d.h der Energie-Impulstensor wird aufgrund der Vakuumanregung nicht mehr proportional zum Metriktensor \mathbf{G} sein (vgl. (IV.56)). Diese Vakuumanregungen können also nicht mehr durch einen kosmologischen Term beschrieben werden. Wir wollen dies im folgenden anhand eines speziellen Typs einer klassischen Vakuumanregung untersuchen. Dieser Vakuumzustand ergibt sich durch eine leichte Verallgemeinerung der Grundzustands-Tensoren ${}^{(0)}\mathcal{H}$ und ${}^{(0)}\mathbf{H}$ (IV.41), (IV.42):

$$\mathcal{H}_{i\mu\lambda} = \varphi \mathcal{B}_{i\lambda} p_\mu + \phi \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \quad (\text{IV.78.a})$$

$$H_{\mu\lambda} = -\varphi \mathcal{B}_{\mu\lambda} . \quad (\text{IV.78.b})$$

Die skalaren Felder φ und ϕ sind willkürliche Raum-Zeit Funktionen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den speziellen Fall, daß beide Felder nur von der Universalzeit θ abhängen, d.h. wir setzen

$$\partial_\mu \varphi = \dot{\varphi} p_\mu \quad (\text{IV.79.a})$$

$$\partial_\mu \phi = \dot{\phi} p_\mu . \quad (\text{IV.79.b})$$

Damit das Gleichungssystem (IV.78.a), (IV.78.b) geschlossen ist, benötigen wir noch einen Ansatz für die $SO(3)$ Feldstärke \mathcal{F} . Ein naheliegender Ansatz ist die Gleichung (IV.43), wobei die Größen f_\perp und f_\parallel jetzt aber Funktionen über der Raum-Zeit sind. Die verallgemeinerten Gleichungen für die Vakuum-Dynamik lauten also

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{B}_{i\mu} = \varphi \mathcal{B}_{i\lambda} p_\mu + \phi \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \quad (\text{IV.80.a})$$

$$\nabla_\lambda p_\mu = -\varphi \mathcal{B}_{\mu\lambda} \quad (\text{IV.80.b})$$

$$\mathcal{F}_{i\mu\lambda} = f_\parallel \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\lambda} + 2f_\perp \mathcal{B}_{i[\mu} p_{\lambda]} \quad (\text{IV.80.c})$$

Das Problem besteht nun darin, nichttriviale Lösungen \mathcal{B} , \mathbf{p} , φ und ϕ zu finden, wobei die geometrische Bedeutung der skalaren Größe φ durch die Hubble-Konstante gegeben ist (vgl. (IV.34), $\lambda = 1$)

$$H \equiv \frac{1}{3} H^\mu{}_\mu = -\varphi = \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \quad (\text{IV.81})$$

Die nichttrivialen Lösungen von (IV.80.a) - (IV.80.c) beschreiben dann ein dynamisches Universum, dessen zeitliche Entwicklung durch den Energie-Impulsinhalt der Vakuumanregungen bestimmt wird. Geometrisch gesehen bestehen diese Anregungen aus etwas komplizierteren, spontanen Aufspaltungen der 4-dimensionalen Raum-Zeit in einen 3-Raum und eine Zeitrichtung. Die Dynamik dieser (1+3) Zerlegung wird aber nur teilweise durch die mikroskopischen Gleichungen (IV.80.a) - (IV.80.c) bestimmt. Das Gleichungssystem muß durch Bewegungsgleichungen für φ und ϕ vervollständigt werden, welche wir aus den Einsteinschen Gleichungen (IV.40) für die Vakuumdynamik herleiten müssen. D.h. wir benötigen den Einsteintensor \mathbf{E} und den Energie-Impulstensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ der angeregten Äther-Konfiguration. Diese zwei Größen sind dann in die Einsteingleichungen einzusetzen, um ein zusätzliches Gleichungssystem für die inneren und äußeren Variablen φ , ϕ zu erhalten.

Wir benötigen dazu eine allgemeine Definition der Energie-Impulsdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ für eine beliebige Konfiguration des Äthersystems. Um zu einer solchen Verallgemeinerung zu gelangen, betrachten wir nochmals den Vakuum-Grundzustand des vorausgegangenen Abschnittes. Man sieht leicht, daß die Lagrangedichten $\Lambda_{\mathcal{B}}$ (IV.68.b) und Λ_p (IV.68.a) für den Grundzustand (IV.48), (IV.49) verschwinden. Aus diesem Grund ist es naheliegend die folgende, allgemeinere Definition für die Energie-Impulsdichte des Äthersystems zu verwenden:

$${}^{(e)}T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi c^2} (H_{\lambda\mu} H^\lambda{}_\nu - \mathcal{H}_{i\lambda\mu} \mathcal{H}^{i\lambda}{}_\nu) + \frac{1}{4\pi} \left(f_{i\mu\lambda} f^i{}_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} f_{i\rho\sigma} f^{i\rho\sigma} \right) \quad (\text{IV.82})$$

($c = \text{konst.}$) .

Hierbei haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die $\mathcal{SO}(3)$ Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ der charakteristischen Flächen verschwindet und der Eichtensor ${}^{(0)}\mathcal{F}$ (IV.53) deshalb allein durch den Eichvektor \mathbf{C} (III.38), wie in Gleichung (III.39), ausgedrückt werden kann. Wir schlagen nun vor, daß der Eichvektor \mathbf{C} in dieser Form zur obigen verallgemeinerten Definition für ${}^{(e)}\mathbf{T}$ beiträgt, d.h. wir identifizieren

$$f_{i\mu\nu} := - (\mathcal{D}_\mu C_{i\nu} - \mathcal{D}_\nu C_{i\mu} + \epsilon_i{}^{jk} C_{j\mu} C_{k\nu}) \quad . \quad (\text{IV.83})$$

Der interessante Punkt hierbei ist, daß durch die Definition (IV.82) der Energie-Impulsinhalt des Äthers ausschließlich vom zusätzlichen Freiheitsgrad \mathbf{C} herrührt. Dies ist ganz analog zum Ätherspin (vgl. Σ , (III.44)) Um diesen Effekt deutlich zu machen, brauchen wir nur den ersten Teil ${}^{(p)}\mathbf{T} + {}^{(B)}\mathbf{T}$ von ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (IV.82), welcher die Tensoren \mathbf{H} und \mathcal{H} enthält, mit Hilfe von \mathbf{C} auszudrücken, da in der zweiten Hälfte von ${}^{(e)}\mathbf{T}$ nur \mathbf{f} (IV.83) enthalten ist. Drücken wir also den Hubble-Tensor \mathbf{H} mit Hilfe des Eichensors \mathcal{H} (II.25) aus, so ergibt sich

$$H_{\lambda\mu} H^\lambda{}_\nu = \mathcal{H}_{i\sigma\mu} \mathcal{H}^i{}_{\rho\nu} p^\sigma p^\rho \quad . \quad (\text{IV.84})$$

Damit erhalten wir für den ersten Teil von ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (IV.82)

$$H_{\lambda\mu} H^\lambda{}_\nu - \mathcal{H}_{i\lambda\mu} \mathcal{H}^{i\lambda}{}_\nu = -\mathcal{H}_{i\sigma\mu} \mathcal{H}^i{}_{\rho\nu} \mathcal{B}^{\sigma\rho} \quad . \quad (\text{IV.85})$$

Als nächstes spalten wir den Eichtensor \mathcal{H} in den charakteristischen, von \mathbf{C} unabhängigen Teil $\bar{\mathcal{H}}$ und in einen \mathbf{C} abhängigen Teil auf:

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \mathcal{B}_{i\nu} \equiv \bar{\mathcal{H}}_{i\nu\mu} = \mathcal{H}_{i\nu\mu} + \epsilon_i^{jk} C_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} . \quad (\text{IV.86})$$

Man beachte, daß der \mathbf{C} abhängige Teil herausfällt, wenn wir den Hubble-Tensor \mathbf{H} (II.25) berechnen. Aus diesem Grund taucht \mathbf{C} auch überhaupt nicht in der Riemannschen Krümmung \mathbf{R} auf, welche ausschließlich eine Funktion des Hubble-Tensors \mathbf{H} und der 3-Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ ist (vgl. (III.69)). Vergleichen wir die allgemeingültige Zerlegung des Eichtensors \mathcal{H}

$$\mathcal{H}_{i\nu\mu} = p_\nu p^\lambda \mathcal{H}_{i\lambda\mu} + \mathcal{B}^\lambda{}_\nu \mathcal{H}_{i\lambda\mu} \quad (\text{IV.87})$$

mit der vorausgehenden Relation (IV.86), so ergibt sich unmittelbar

$$\mathcal{B}^\lambda{}_\nu \mathcal{H}_{i\lambda\mu} = -\epsilon_i^{jk} C_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} . \quad (\text{IV.88})$$

Somit erhalten wir aus (IV.85), für den ersten Teil der Energie-Impulsdichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (IV.82)

$$H_{\lambda\mu} H^\lambda{}_\nu - \mathcal{H}_{i\lambda\mu} \mathcal{H}^{i\lambda}{}_\nu = 2C^i{}_\mu C_{i\nu} . \quad (\text{IV.89})$$

Damit findet man für ${}^{(e)}\mathbf{T}$ in Übereinstimmung mit der obigen Behauptung:

$${}^{(e)}T_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\epsilon^2} C^i{}_\mu C_{i\nu} + \frac{1}{4\pi} \left(f_{i\mu\lambda} f^{i\lambda}{}_\nu - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} f_{i\rho\sigma} f^{i\rho\sigma} \right) . \quad (\text{IV.90})$$

Wir sehen, daß das Äthersystem i.a. nur dann einen nicht-verschwindenden Energie-Impuls ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (und Spin Σ) besitzt, wenn der zusätzliche Freiheitsgrad \mathbf{C} angeregt ist.

Dieses etwas unerwartete Ergebnis legt nun eine neue Auffassung über den Energie-Impulsinhalt der Gravitationskraft nahe. Während die früheren Beziehungen (IV.67.a) - (IV.67.d) dem Äther-System $(\mathcal{B}, \mathbf{p})$ einen Energie-Impulsinhalt zugesprochen haben, nämlich ${}^{(e)}\mathbf{T} + {}^{(\mathcal{B})}\mathbf{T}$, so wird jetzt anhand der Beziehung (IV.89) deutlich,

daß dieser Energie-Anteil eigentlich dem Eichfeld \mathbf{C} zuzuordnen ist! Daher wird man sich jetzt aufgrund der Beziehung (IV.90) auf den Standpunkt stellen, daß der Energie-Impulsinhalt der Gravitationskraft einzig und allein vom \mathbf{C} -Feld, also den äußeren Variablen $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$, getragen wird. Rein formal läßt sich aber $^{(\text{e})}\mathbf{T}$ wegen der Beziehung (III.38) auch durch das Ätherfeld \mathbf{B} ausdrücken!

Als Beispiel betrachten wir die Vakuum-Dynamik (IV.80.a), (IV.80.b). Der Ausdruck für den Eichvektor $^{(0)}\mathbf{C}$ (IV.50) verallgemeinert sich zu

$$C_{i\mu} = -\phi \mathcal{B}_{i\mu} \quad (\text{IV.91})$$

und gibt der skalaren Größe ϕ die Bedeutung einer extrinsischen Variablen, welche in der Energie-Impulsdichte $^{(\text{e})}\mathbf{T}$, aber nicht in der Riemannschen Krümmung \mathbf{R} auftaucht. Für das Feld \mathbf{f} (IV.83) erhalten wir daher

$$f_{i\mu\nu} = \phi^2 \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} - \left(\dot{\phi} - \varphi \phi \right) (\mathcal{B}_{i\mu} p_\nu - \mathcal{B}_{i\nu} p_\mu) . \quad (\text{IV.92})$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun den entsprechenden Energie-Impulstensor $^{(\text{f})}\mathbf{T}$ berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} ^{(\text{f})}T_{\mu\nu} &:= \frac{1}{4\pi} \left(f_{i\mu\lambda} f^i{}_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} f_{i\rho\sigma} f^{i\rho\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\left(\dot{\phi} - \varphi \phi \right)^2 + \phi^4 \right] (3p_\mu p_\nu - \mathcal{B}_{\mu\nu}) . \end{aligned} \quad (\text{IV.93})$$

Diese Form des Energie-Impulstensors entspricht dem einer idealen Flüssigkeit

$$^{(\text{id})}T_{\mu\nu} = \mathcal{M} p_\nu p_\mu - \mathcal{P} \mathcal{B}_{\mu\nu} , \quad (\text{IV.94})$$

wobei die Energiedichte $^{(\text{f})}\mathcal{M}$ und der Druck $^{(\text{f})}\mathcal{P}$ durch folgende Ausdrücke gegeben sind

$$^{(\text{f})}\mathcal{M} = \frac{3}{8\pi} \left[\left(\dot{\phi} - \varphi \phi \right)^2 + \phi^4 \right] \quad (\text{IV.95.a})$$

$$^{(\text{f})}\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\dot{\phi} - \varphi \phi \right)^2 + \phi^4 \right] . \quad (\text{IV.95.b})$$

Demnach gehorchen ${}^{(f)}\mathcal{M}$ und ${}^{(f)}\mathcal{P}$ einer thermodynamischen Zustandsgleichung für ein ideales Gas von masselosen Teilchen (nämlich den $\text{SO}(3)$ Eichbosonen des \mathbf{C} Feldes):

$${}^{(f)}\mathcal{P} = \frac{1}{3} {}^{(f)}\mathcal{M} . \quad (\text{IV.96})$$

Der Energie-Impulsinhalt des \mathbf{B} und \mathbf{p} Feldes stellt sich als ein reiner Drucktensor heraus:

$$\begin{aligned} {}^{(\mathcal{B})}T_{\mu\nu} + {}^{(\mathbf{p})}T_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2\pi\epsilon^2} C^i{}_\mu C_{i\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \phi^2 \mathcal{B}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{IV.97})$$

Damit ergibt sich der totale Energie-Impulsinhalt des gesamten Äthersystems zu

$$\begin{aligned} {}^{(e)}T_{\mu\nu} &= {}^{(\mathcal{B})}T_{\mu\nu} + {}^{(\mathbf{p})}T_{\mu\nu} + {}^{(f)}T_{\mu\nu} \\ &= \frac{3}{8\pi} \left[\left(\dot{\phi} - \varphi\phi \right)^2 + \phi^4 \right] p_\mu p_\nu - \frac{1}{8\pi} \left[\left(\dot{\phi} - \varphi\phi \right)^2 + \phi^4 - \frac{4}{\epsilon^2} \phi^2 \right] \mathcal{B}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{IV.98})$$

Der im letzten Abschnitt diskutierte Grundzustand (IV.56) kann hieraus wieder zurückgewonnen werden durch die Substitution:

$$\phi \rightarrow \frac{1}{L} = \text{konst.} \quad (\text{IV.99.a})$$

$$\varphi \rightarrow \frac{1}{l} = \text{konst.} . \quad (\text{IV.99.b})$$

IV.6 Die Konstruktion der Riemannschen Krümmung

Um zu einer Lösung des Gleichungssystems für die verallgemeinerte Vakuumdynamik (IV.80.a) - (IV.80.c) zu gelangen, müssen wir zuerst den Riemannschen Krümmungstensor \mathbf{R} aus diesen Gleichungen bestimmen. Zunächst überzeugen wir uns von deren Widerspruchsfreiheit, das heißt, daß die Bianchi-Identität (II.23) erfüllt sein muß.

Eine direkte Berechnung ergibt für den Ansatz (IV.80.c)

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{F}_{i\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu \mathcal{F}_{i\nu\lambda} + \mathcal{D}_\nu \mathcal{F}_{i\lambda\mu} = \left[\dot{f}_\parallel - 2(\varphi f_\parallel - \phi f_\perp) \right] \epsilon_i^{jk} (p_\lambda \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + p_\mu \mathcal{B}_{j\nu} \mathcal{B}_{k\lambda} + p_\nu \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu}) . \quad (\text{IV.100})$$

Wir haben dabei angenommen, daß die skalaren Felder f_\parallel , f_\perp , ähnlich wie die skalaren Größen φ , ϕ (IV.79.a), (IV.79.b), auf jeder charakteristischen Fläche konstant sind

$$\partial_\mu f_\parallel = \dot{f}_\parallel p_\mu \quad (\text{IV.101.a})$$

$$\partial_\mu f_\perp = \dot{f}_\perp p_\mu . \quad (\text{IV.101.b})$$

Anstelle von Bedingung (IV.45) gilt jetzt der allgemeinere Ausdruck

$$\dot{f}_\parallel = 2(\varphi f_\parallel - \phi f_\perp) . \quad (\text{IV.102})$$

Als nächstes berechnen wir die charakteristische $\mathcal{SO}(3)$ Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ (III.39), welche eine Verallgemeinerung von (IV.51) ist:

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = \bar{f}_\parallel \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + \bar{f}_\perp (\mathcal{B}_{i\mu} p_\nu - \mathcal{B}_{i\nu} p_\mu) , \quad (\text{IV.103})$$

wobei folgende Abkürzungen benutzt wurden:

$$\bar{f}_\parallel := f_\parallel - \phi^2 \quad (\text{IV.104.a})$$

$$\bar{f}_\perp := f_\perp - (\varphi\phi - \dot{\phi}) . \quad (\text{IV.104.b})$$

Im Gegensatz zum Grundzustand verschwindet die charakteristische Krümmung $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$ (III.68) nicht:

$$\overset{\cap}{R}_{\mu\sigma\nu\lambda} = \bar{f}_\parallel (\mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\sigma\lambda} - \mathcal{B}_{\mu\lambda} \mathcal{B}_{\sigma\nu}) + \bar{f}_\perp (*p_{\mu\sigma\lambda} p_\nu - *p_{\mu\sigma\nu} p_\lambda) . \quad (\text{IV.105})$$

Für den parallelen Teil $\overset{\parallel}{\mathbf{R}}$ (III.71) von \mathbf{R} erhalten wir deshalb den folgenden, allgemeineren Ausdruck

$$\overset{\parallel}{R}_{\mu\sigma\nu\lambda} = (\bar{f}_\parallel - \varphi^2) (\mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\sigma\lambda} - \mathcal{B}_{\mu\lambda} \mathcal{B}_{\sigma\nu}) + \bar{f}_\perp (*p_{\mu\sigma\lambda} p_\nu - *p_{\mu\sigma\nu} p_\lambda) . \quad (\text{IV.106})$$

Der orthogonale Teil (III.72) ergibt sich zu

$${}^\perp R_{\mu\sigma\nu\lambda} = (\varphi^2 - \dot{\varphi}) (\mathcal{B}_{\mu\lambda} p_\sigma p_\nu + \mathcal{B}_{\sigma\nu} p_\mu p_\lambda - \mathcal{B}_{\sigma\lambda} p_\mu p_\nu - \mathcal{B}_{\mu\nu} p_\sigma p_\lambda) . \quad (\text{IV.107})$$

Man beachte, daß hier wie erwartet nur der intrinsische Skalar φ , aber nicht die extrinsische Größe ϕ im Riemannschen Krümmungstensor $\mathbf{R} = {}^\perp\mathbf{R} + {}^\parallel\mathbf{R}$ auftaucht.

Der totale Riemannsche Krümmungstensor \mathbf{R} muß nun die zwei Bianchi-Identitäten (III.62.a) und (III.62.b) erfüllen. Aufgrund der ersten Bianchi-Identität muß der zweite Term in der charakteristischen Krümmung $\overset{\cap}{\mathbf{R}}$ (IV.105) verschwinden, d.h

$$\bar{f}_\perp \equiv 0 . \quad (\text{IV.108})$$

Die $\mathcal{SO}(3)$ Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ (IV.103) vereinfacht sich deshalb zu

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = \bar{f}_\parallel \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} , \quad (\text{IV.109})$$

d.h. die charakteristischen Flächen werden mit der Geometrie einer 3-(pseudo-) Sphäre $S^3_{(\sigma)}$ ausgestattet. Mit Hilfe der Bianchi-Identität für $\bar{\mathbf{F}}$ können wir eine Beziehung zwischen dem Skalar \bar{f}_\parallel und dem Radius von $S^3_{(\sigma)}$ herleiten. Zu diesem Zweck ist es vorteilhaft, von der kovarianten Konstanz von \mathbf{B} Gebrauch zu machen. Dazu gehen wir von der charakteristischen Ableitung $\overset{\cap}{\mathcal{D}}$ (III.9.b) aus, welche sich jedoch auf die charakteristische Konnexion $\overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}}$ mit nicht-verschwindender Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ (III.47) bezieht. Deshalb muß die homogene Bianchi-Identität durch ihre torsive Verallgemeinerung ersetzt werden:

$$\overset{\cap}{\mathcal{D}}_\lambda \bar{F}_{i\mu\nu} + \overset{\cap}{\mathcal{D}}_\mu \bar{F}_{i\nu\lambda} + \overset{\cap}{\mathcal{D}}_\nu \bar{F}_{i\lambda\mu} = 2 \left(\bar{F}_{i\nu\sigma} \overset{\cap}{Z}^\sigma_{\mu\lambda} + \bar{F}_{i\mu\sigma} \overset{\cap}{Z}^\sigma_{\lambda\nu} + \bar{F}_{i\lambda\sigma} \overset{\cap}{Z}^\sigma_{\nu\mu} \right) , \quad (\text{IV.110})$$

mit der charakteristischen Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$

$$\overset{\cap}{Z}^\sigma_{\nu\lambda} = -\frac{1}{2} \varphi (\mathcal{B}^\sigma_{\nu} p_\lambda - \mathcal{B}^\sigma_{\lambda} p_\nu) . \quad (\text{IV.111})$$

Auch hier hängt wiederum die charakteristische Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ ausschließlich von der intrinsischen Größe φ ab. Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ dem Oberflächentheorem

(III.1.c) genügt. Die relative Torsion (III.57) dagegen ist eine Funktion der extrinsischen Variablen ϕ

$$\overset{\cup}{Z}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \phi^* p^\lambda{}_{\mu\nu} \quad (\text{IV.112})$$

und gehorcht erwartungsgemäß dem Theorem nicht. Setzen wir nun die $\mathcal{SO}(3)$ Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ (IV.109) und die charakteristische Torsion $\overset{\cap}{\mathbf{Z}}$ (IV.111) in die inhomogene Bianchi-Identität (IV.110) ein, so ergibt sich für die Größe $\bar{f}_{||}$ die folgende Bedingung

$$\dot{\bar{f}}_{||} = 2\varphi \bar{f}_{||} . \quad (\text{IV.113})$$

Um diese Gleichung zu integrieren, benützen wir die Tatsache, daß die verallgemeinerte Vakuum-Dynamik (IV.80.a) - (IV.80.c) die Bedingung der Parallelisierbarkeit (IV.31) (mit $\lambda = 1$) erfüllt. Damit ergibt sich die folgende Relation zwischen φ und der relativen Expansionsrate des Universums:

$$\varphi = -\frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} , \quad (\text{IV.114})$$

mit der Lösung

$$\bar{f}_{||} = \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2} . \quad (\text{IV.115})$$

Für $\sigma = 0$ erhält man eine Euklidische Foliation der Raum-Zeit, wogegen wir für $\sigma = \overset{+}{-} 1$ die (pseudo-) sphärische Geometrie erhalten. Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir die endgültige Form der charakteristischen Krümmung finden

$$\bar{F}_{i\mu\nu} = \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2} \epsilon_i{}^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} \quad (\text{IV.116.a})$$

$$\overset{\cap}{R}_{\mu\sigma\nu\lambda} = \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2} (\mathcal{B}_{\mu\nu} \mathcal{B}_{\sigma\lambda} - \mathcal{B}_{\mu\lambda} \mathcal{B}_{\sigma\nu}) . \quad (\text{IV.116.b})$$

Diese Ausdrücke unterscheiden sich von den Gleichungen des früheren Vakuum-Kandidaten (IV.9.a), (IV.9.b) nur durch die Variabilität des Radius \mathcal{R} !

Nachdem jetzt alle Bestandteile (IV.105) - (IV.107) des Krümmungstensors bekannt sind, können wir diesen angeben:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\sigma\nu\lambda} &= \left(\frac{\sigma}{\mathcal{R}^2} - \varphi^2 \right) (G_{\mu\nu}G_{\sigma\lambda} - G_{\mu\lambda}G_{\sigma\nu}) \\
&+ \left(\frac{\sigma - \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \right) (G_{\mu\lambda}p_{\sigma}p_{\nu} + G_{\sigma\nu}p_{\mu}p_{\lambda} - G_{\mu\nu}p_{\lambda}p_{\sigma} - G_{\sigma\lambda}p_{\mu}p_{\nu}) .
\end{aligned} \tag{IV.117}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die zwei Bianchi-Identitäten (III.62.a) und (III.62.b) erfüllt sind. Eine zweite, indirekte Methode dafür besteht darin, daß wir den Einsteintensor \mathbf{E} berechnen

$$E_{\mu\nu} = \left(\frac{\dot{\mathcal{R}}^2 - \sigma}{\mathcal{R}^2} + 2 \frac{\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} \right) \mathcal{B}_{\mu\nu} + 3 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2 - \sigma}{\mathcal{R}^2} p_{\mu}p_{\nu} , \tag{IV.118}$$

welcher eine verschwindende Divergenz besitzen muß ($\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv 0$). Mit dem Energie-Impuls-Tensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ (IV.98) und dem Einstein-Tensor (IV.118) können jetzt die Einstein-Gleichungen für das leere Universum hingeschrieben werden und dessen Verhalten untersucht werden (siehe Kapitel VII).

Kapitel V

Vakuum-Dynamik und Spin-Kompensation

Nach der Definition des Vakuums im vorhergehenden Kapitel soll nun im Detail untersucht werden, wie der Riemannsche Charakter des Vakuums mit der Existenz einer nicht-verschwindenden Vakuum-Spindichte ($\Sigma \neq 0$) verträglich ist. Das Problem besteht dabei darin, daß spintragende Felder – wie z.B. unser Ätherfeld \mathcal{B} , \mathbf{p} – eine nicht-verschwindende Mathisson'sche Kraftdichte im gekrümmten Raum erfahren. Das hat aber zur Folge, daß die Einsteinschen Feldgleichungen inkonsistent werden. Der übliche Ausweg besteht darin, den Riemannschen Charakter der Raum-Zeit aufzugeben und einen Raum mit Torsion und Krümmung zugrunde zu legen (Riemann-Cartan-Raum), in dem die Divergenz des Einstein-Tensors nicht notwendigerweise verschwinden muß. In Gegensatz zu diesem Ausweg, wollen wir aber an der Idee des Riemannschen Raumes festhalten und innerhalb diese Rahmens eine andere Lösung des Problems aufzeigen.

Unsere Lösung besteht darin, statt der Einstein-Gleichungen die mikroskopischen Feldgleichungen (II.20.a) bis (II.22) als die fundamentale Dynamik anzunehmen.

Es wird für den Vakuumzustand explizit nachgewiesen, daß die Lösungen dieses Gleichungssystems erster Ordnung genau diejenige Teilmenge der Lösungen des zugehörigen 2.Ordnungs-Systems (Klein-Gordon-Gleichungen) identifizieren, auf der die Mathisson'sche Kraftdichte verschwindet. Dadurch erweist sich der klassische Vakuumzustand als ein einfaches Demonstrationsbeispiel für den Effekt der Spin-Kompensation im Riemannschen Raum. Dieser Effekt ermöglicht also durchaus die Existenz spin-tragender Felder in einem torsionfreien Raum. Zwar produziert der Ätherspin auch in unserer Theorie eine Torsion, jedoch handelt es sich hierbei um die Torsion einer Unterkonnexion (nämlich der charakteristischen Konnexion $\overset{\cap}{\Gamma}$, siehe Kapitel III). Die Konnexion Γ des Tangentialbündels τ_4 der Raum-Zeit bleibt nach wie vor streng Riemann'sch.

Durch diese Ergebnis scheint uns das oft geäußerte Argument der Anhänger der Torsionstheorien, daß nämlich das Spinphänomen notwendigerweise zu einer Riemann-Cartan-Struktur der Raum-Zeit führen müsse, widerlegt zu sein. Wegen der Bedeutung dieses Resultates wurde das folgende Kapitel soweit wie möglich unabhängig aufgebaut, so daß es auch ohne Kenntnis der übrigen Teile der Arbeit gelesen werden kann.

V.1 Das Spin-Problem in der Einsteinschen Theorie

Der Ausgangspunkt in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Annahme, daß der metrische Tensor \mathbf{G} das fundamentale Objekt ist, mit dem sich die anziehende Materie beschreiben läßt. In diesem Sinne sind die Einsteinschen Feldgleichungen

$$E_{\mu\nu} = 8\pi \frac{k}{c^4} \tilde{T}_{\mu\nu} \equiv 8\pi L_p^2 T_{\mu\nu} \quad (\text{V.1})$$

$$\left(E_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R G_{\mu\nu} \right)$$

Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Bestimmung des metrischen Feldes \mathbf{G} bei gegebenem Energie-Impulstensor \mathbf{T} . Im Makroskopischen, d.h. für die Beschreibung von Sternen, Galaxien usw. ist dies richtig, doch versagt die Theorie schon im klassischen Bereich, wenn man versucht, das Gravitationsfeld an elementare Teilchen zu koppeln. Im folgenden wollen wir dieses Phänomen genauer untersuchen. Im Riemannschen Raum verschwindet die Divergenz des Einstein Tensors \mathbf{E} identisch

$$\nabla^\mu E_{\mu\nu} \equiv 0 . \quad (\text{V.2})$$

Deshalb muß der symmetrische Energie-Impulstensor eine verschwindende Divergenz besitzen

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{V.3})$$

Für makroskopische Materie ist dies ein plausibles Resultat, im mikroskopischen Bereich taucht jedoch das Problem auf, wie man sich einen symmetrischen Energie-Impuls Tensor beschafft, dessen Divergenz im gekrümmten Raum verschwindet. In der Literatur wird dieses Problem mehr oder weniger übergangen und nur auf einige Beispiele verwiesen, bei denen das Problem nicht auftaucht.¹

Bevor wir diese Schwierigkeiten im einzelnen untersuchen, wollen wir jedoch kurz einen unproblematischen Fall betrachten. Ein solcher liegt bei einem Skalarfeld und einem reinen Eichfeld vor. Betrachten wir beispielsweise den symmetrischen Energie-Impulstensor $^{(\text{F})}\mathbf{T}$ für ein $\text{SO}(3)$ Eichfeld \mathbf{F} im flachen Raum ²

$$^{(\text{F})}T_{\rho\kappa} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\lambda\sigma} F^i_{\rho\lambda} F_{i\kappa\sigma} - \frac{1}{4} g_{\rho\kappa} g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} F_{i\lambda\mu} F^i_{\sigma\nu} \right) , \quad (\text{V.4})$$

so erhalten wir dessen Ausdruck im gekrümmten Raum mit Hilfe des Äquivalenzprinzips

¹Ein Ausnahme bildet das Buch von V.de Sabbata und M.Gasperini: „Introduction to Gravitation“, World Scientific (1985), in welchem die Autoren die Einführung der Torsion bevorzugen.

²Wir benützen die Minkowski Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

$(\partial \rightarrow \nabla, \mathbf{g} \rightarrow \mathbf{G})$ zu

$${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}_{\rho\kappa} = \frac{1}{4\pi} G^{\lambda\sigma} F_{\rho\lambda}^i F_{i\kappa\sigma} - G_{\rho\kappa} \Lambda_F , \quad (\text{V.5})$$

wobei die Lagrange-Dichte Λ_F durch

$$\Lambda_F = \frac{1}{16\pi} G^{\lambda\sigma} G^{\mu\nu} F_{i\lambda\mu} F_{i\sigma\nu}^i \quad (\text{V.6})$$

gegeben ist. Die kovariante Divergenz dieses Tensors ist

$$\nabla_\rho {}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}^{\rho\kappa} = \frac{1}{4\pi} (\mathcal{D}_\rho F_i^{\rho\lambda}) F^{i\kappa}_\lambda . \quad (\text{V.7})$$

\mathcal{D} ist die allgemeine (d.h. eich- und koordinaten-) kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\sigma F^{i\rho\lambda} &= \nabla_\sigma F^{i\rho\lambda} + \epsilon^{ijk} A_{j\sigma} F_k^{\rho\lambda} \\ &= D_\sigma F^{i\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\kappa\sigma} F^{i\kappa\lambda} + \Gamma^\lambda_{\kappa\sigma} F^{i\rho\kappa} . \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

Die damit berechnete Divergenz (V.7) verschwindet wie erwartet

$$\nabla_\rho {}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}^{\rho\kappa} = 0 , \quad (\text{V.9})$$

vorausgesetzt die homogenen Yang-Mills Gleichungen sind erfüllt

$$\mathcal{D}_\rho F_i^{\rho\lambda} = 0 . \quad (\text{V.10})$$

Es entstehen somit keine Schwierigkeiten für die Divergenzfreiheit (V.2), wenn wir die Yang-Mills Felder an das Gravitationsfeld koppeln. Der hier betrachtete Fall des reinen Eichfeldes ist jedoch etwas zu einfach, da der Energie-Impulstensor ${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}$ (V.5) die Konnexionskoeffizienten $\mathbf{\Gamma}$ nicht enthält. Der Grund hierfür ist, daß sich letztere herausheben, wenn man das Feld \mathbf{F} mittels des Äquivalenzprinzips vom flachen- in den gekrümmten Raum überträgt:

$$\begin{aligned} F_{i\mu\nu} &= \nabla_\mu A_{i\nu} - \nabla_\nu A_{i\mu} + \epsilon_i^{jk} A_{j\mu} A_{k\nu} \\ &\equiv \partial_\mu A_{i\nu} - \partial_\nu A_{i\mu} + \epsilon_i^{jk} A_{j\mu} A_{k\nu} \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Taucht nun die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ nun im Energie-Impulstensor \mathbf{T} auf, dann produziert die Divergenz von \mathbf{T} Ableitungen von $\mathbf{\Gamma}$, welche die Form eines zusätzlichen Krümmungsterms haben und dafür verantwortlich sind, daß die Divergenz nicht mehr verschwindet.

Um dies an einem Beispiel zu verdeutlichen, betrachten wir ein $SO(3)$ Materiefeld \mathbf{B} , welches wir durch die folgende Verallgemeinerung der Yang-Mills Gleichung an ein Eichfeld \mathbf{F} koppeln wollen:

$$\mathcal{D}^\mu F_{i\mu\nu} = -\epsilon_i^{jk} B_{j\mu} (\mathcal{D}_\nu B_k^\mu) . \quad (\text{V.12})$$

Weiter nehmen wir an, daß das neue Feld \mathbf{B} der Klein-Gordon Gleichung im gekrümmten Raum gehorcht

$$\mathcal{D}^\lambda \mathcal{D}_\lambda B_{i\mu} = -\frac{1}{\mathcal{L}^2} B_{i\mu} . \quad (\text{V.13})$$

Der Längenparameter \mathcal{L} hat die Bedeutung einer Comptonwellenlänge

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{Mc} , \quad (\text{V.14})$$

wobei M die Masse des zugehörigen Eichbosons bezeichnet. Wir können nun das Äquivalenzprinzip anwenden, um den *kanonischen* Energie-Impulstensor $^{(B)}\mathbf{T}$ im gekrümmten Raum zu berechnen

$$^{(B)}T_{\rho\kappa} = -\frac{1}{4\pi} (\mathcal{D}^\rho B^{i\sigma}) (\mathcal{D}^\kappa B_{i\sigma}) - G^{\rho\kappa} \Lambda_B , \quad (\text{V.15})$$

mit der Lagrange-Dichte

$$\Lambda_B = -\frac{1}{8\pi} \left((\mathcal{D}_\mu B_{i\nu}) (\mathcal{D}^\mu B^{i\nu}) - \frac{1}{\mathcal{L}^2} B_{i\mu} B^{i\mu} \right) . \quad (\text{V.16})$$

Der Tensor $^{(B)}\mathbf{T}$ enthält nun explizit die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$. Aus diesem Grund produziert dessen Divergenz zusätzliche, aus der Krümmung \mathbf{R} und der Spindichte $^{(B)}\mathbf{\Sigma}$, aufgebaute Terme:

$$\nabla_\rho ^{(B)}T^{\rho\kappa} = -\frac{1}{4\pi} \epsilon_i^{jk} F_{j\nu}{}^\kappa B_{k\mu} (\mathcal{D}^\nu B^{i\mu}) - \frac{1}{2} R^\kappa{}_{\nu\mu\rho} ^{(B)}\Sigma^{\rho\mu\nu} , \quad (\text{V.17})$$

wobei der Spin (Drehimpuls) $^{(B)}\Sigma$ wie folgt definiert ist

$$^{(B)}\Sigma^{\lambda\nu\mu} = -\frac{\partial\Lambda_B}{\partial(\mathcal{D}_\mu B_{i\sigma})}(L^{\nu\lambda})^\rho{}_\sigma B_{i\rho} \quad (\text{V.18.a})$$

$$(L^{\nu\lambda})^\rho{}_\sigma = g^{\nu\rho}g^\lambda{}_\sigma - g^{\lambda\rho}g^\nu{}_\sigma . \quad (\text{V.18.b})$$

Für das \mathbf{B} Feld finden wir mit Gleichung (V.16)

$$^{(B)}\Sigma^{\lambda\nu\mu} = -\frac{1}{4\pi} \left((\mathcal{D}^\mu B^{i\nu}) B_i{}^\lambda - (\mathcal{D}^\mu B^{i\lambda}) B_i{}^\nu \right) . \quad (\text{V.19})$$

Betrachtet man den gesamten Energie-Impulstensor des Eich- und Materiefeldes, so bereitet der erste Term auf der rechten Seite von (V.17) keine Schwierigkeiten, da er sich mit der rechten Seite von (V.7) aufgrund der inhomogenen Yang-Mills Gleichung (V.12) hinweghebt:

$$\nabla_\rho \left({}^{(F)}\mathcal{T}^{\rho\kappa} + {}^{(B)}T^{\rho\kappa} \right) = -\frac{1}{2} R^\kappa{}_{\nu\mu\rho} {}^{(B)}\Sigma^{\rho\mu\nu} . \quad (\text{V.20})$$

Der verbleibende Krümmungsterm, die *Mathisson Kraftdichte*, verhindert nun ganz offensichtlich das Verschwinden der Divergenz in (V.20). Das heißt, daß der kanonische Energie-Impulstensor des gekoppelten Systems nicht mehr für die Einstein-Gleichungen (V.1) verwendet werden kann. Daher sind diese Gleichungen mit der kanonischen Feldtheorie im flachen Raum inkonsistent, oder aber das Äquivalenzprinzip versagt hier.

Der gewöhnliche Weg dieses Problem zu beseitigen besteht darin, daß man das Äquivalenzprinzip scheinbar aufgibt und einen neuen Energie-Impulstensor \mathcal{T} (den sog. *metrischen* Energie-Impulstensor) einführt, wobei dessen Divergenz aufgrund seiner Konstruktion verschwindet. Diesen neuen Tensor \mathcal{T} erhält man, indem man das Wirkungsintegral W bezüglich der Metrik \mathbf{G} variiert:

$$\delta_G W = -\frac{1}{2} \int \mathcal{T}^{\rho\kappa} (\delta G_{\rho\kappa}) \sqrt{-G} d^4x . \quad (\text{V.21})$$

Paradoxerweise wird hier das Äquivalenzprinzip, obwohl zur Konstruktion des geeigneten Energie-Impulstensors gerade erst aufgegeben, trotzdem für das Wirkungsintegral benutzt:

$$W = \int \Lambda \sqrt{-G} d^4x . \quad (\text{V.22})$$

Für das vorliegende System der gekoppelten Felder setzt sich die Lagrange-Dichte Λ aus dem Eichteil Λ_F und dem Materieteil Λ_B zusammen

$$\Lambda = \Lambda_F + \Lambda_B . \quad (\text{V.23})$$

Der modifizierte Tensor ${}^{(F)}\mathcal{T}$ für den Eichteil ist, aufgrund seiner Eichinvarianz, identisch mit dem früheren Tensor ${}^{(F)}\mathcal{T}$ (V.5). Im Falle eines Materiefeldes unterscheidet sich der neue Tensor ${}^{(B)}\mathcal{T}$ jedoch vom kanonischen ${}^{(B)}\mathbf{T}$ (V.15) durch einen nicht-trivialen Term ${}^{(B)}\mathbf{t}$

$${}^{(B)}\mathcal{T}^{\rho\kappa} = {}^{(B)}T^{\rho\kappa} + {}^{(B)}t^{\rho\kappa} , \quad (\text{V.24})$$

welcher folgende Gestalt besitzt

$${}^{(B)}t^{\rho\kappa} = -\frac{1}{2}\nabla_\nu \left({}^{(B)}\Sigma^{\rho\nu\kappa} + {}^{(B)}\Sigma^{\kappa\nu\rho} - {}^{(B)}\Sigma^{\kappa\rho\nu} \right) . \quad (\text{V.25})$$

Aufgrund dieses Korrekturterms verschwindet jetzt die Divergenz des gesamten, modifizierten Tensors, d.h.

$$\nabla_\rho \left({}^{(F)}\mathcal{T}^{\rho\kappa} + {}^{(B)}\mathcal{T}^{\rho\kappa} \right) = \nabla_\rho \left({}^{(F)}T^{\rho\kappa} + {}^{(B)}T^{\rho\kappa} \right) + \nabla_\rho {}^{(B)}t^{\rho\kappa} = 0 . \quad (\text{V.26})$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (V.20) so ergibt sich

$$\nabla_\rho {}^{(B)}t^{\rho\kappa} = +\frac{1}{2}R^\kappa{}_{\nu\mu\rho} {}^{(B)}\Sigma^{\rho\mu\nu} . \quad (\text{V.27})$$

Für die folgenden Betrachtungen ist es nützlich, die Herleitung von Gleichung (V.27) im einzelnen zu zeigen. Dazu beachte man, daß die Spindichte ${}^{(B)}\Sigma$ (V.19) schiefssymmetrisch ist

$${}^{(B)}\Sigma^{\rho\nu\kappa} = -{}^{(B)}\Sigma^{\nu\rho\kappa} , \quad (\text{V.28})$$

und ihre Divergenz aufgrund der Klein-Gordon Gleichung (V.13) verschwindet:

$$\nabla_\kappa {}^{(B)}\Sigma^{\rho\nu\kappa} = 0 . \quad (\text{V.29})$$

Aus diesen Eigenschaften können wir folgende Relationen herleiten

$$\nabla_\rho \nabla_\nu {}^{(B)}\Sigma^{\rho\nu\kappa} = -\frac{1}{2} R^\kappa_{\sigma\nu\rho} {}^{(B)}\Sigma^{\rho\nu\sigma} \quad (\text{V.30.a})$$

$$\nabla_\rho \nabla_\nu {}^{(B)}\Sigma^{\kappa\nu\rho} = R^\kappa_{\sigma\rho\nu} {}^{(B)}\Sigma^{\sigma\nu\rho} , \quad (\text{V.30.b})$$

aus welchen wir, unter Berücksichtigung der ersten Bianchi Identität

$$R^\kappa_{[\rho\nu\sigma]} = 0, \quad (\text{V.31})$$

die gesuchte Gleichung (V.27) erhalten. Der *metrische* Energie-Impulstensor für das gekoppelte System besitzt also, wie erwartet, eine verschwindende Divergenz (V.26).

Obwohl dieses Ergebnis in der Literatur weit verbreitet ist, liegt doch eine unbefriedigende Situation vor:

1. Der kanonische Tensor ${}^{(B)}\mathbf{T}$ läßt sich mit Hilfe des Äquivalenzprinzips nicht vom flachen in den gekrümmten Raum übertragen, obwohl ${}^{(B)}\mathbf{T}$ eine in der Literatur allgemein akzeptierte Größe innerhalb der kanonischen Feldtheorie des flachen Raumes ist.
2. Man muß vielmehr durch Variation des Wirkungsintegrals einen neuen Materietensor ${}^{(B)}\mathcal{T}$ konstruieren, wobei aber der Integrand des Wirkungsintegrals durch das Äquivalenzprinzip bestimmt wird.
3. Dieser neue Tensor ${}^{(B)}\mathcal{T}$ unterscheidet sich vom kanonischen ${}^{(B)}\mathbf{T}$ durch einen Spinterm ${}^{(B)}\mathbf{t}$, welcher auf den ersten Blick für eine direkte Wechselwirkung zwischen Spin und Raumkrümmung verantwortlich zu sein scheint (Mathisson-Kraft). Da der Energie-Impulsinhalt von ${}^{(B)}\mathbf{t}$ nun im modifizierten Tensor

$^{(B)}\mathcal{T}$, welcher eine verschwindende Divergenz besitzt, absorbiert ist, ist man versucht, dieses Verfahren allzu voreilig als eine Lösung des Problems zu akzeptieren.

Diese Interpretation des Korrekturterms $^{(B)}\mathbf{t}$ ist jedoch höchst widersprüchlich, da

1. der Korrekturterm im Grenzfall des flachen Raumes nicht verschwindet, und daher in diesem Grenzfall zu einer anderen Energie-Impuls-Lokalisierung führt.
2. Ferner gehorcht das spinnende Teilchen einer anderen Bewegungsgleichung, da die Mathisson Kraft nicht mehr existent ist.

Aufgrund dieser Problematik in der Einsteinschen Relativitätstheorie scheint es unvermeidbar zu sein einige Verbesserungen anzubringen. In diesem Zusammenhang ist die Idee, die Torsion mit einzubeziehen, eine elegante Möglichkeit, das Problem des spinnenden Teilchens zu lösen [13]. Bevor jedoch solch eine grundlegende Änderung der Einsteinschen Theorie unternommen wird, sollte man versuchen einen Mechanismus zu finden, der den Einfluß des Spins auf die Raum-Zeit Geometrie innerhalb der Einsteinschen Theorie zu unterdrücken vermag.

V.2 Das Kompensationsfeld

Diese Schwierigkeit weist einige Ähnlichkeit mit dem Problem auf, in einer *global* eichinvarianten Eichtheorie *lokale* Eichinvarianz zu erhalten. In solch einer Theorie produziert eine lokale Eichtransformation des Materiefeldes störende Terme, welche die Ableitung des benützten Elementes der Eichgruppe enthalten. Um diese zusätzlichen Terme zu beseitigen, wird ein Kompensationsfeld (das Eichpotential \mathbf{A}) in die Theorie eingeführt, wobei dessen inhomogene Terme sich mit den Störtermen

hinwegheben. Als Ergebnis erhalten wir ein gekoppeltes System von Eich- und Materiefelder, welche zusammen die gewünschte lokale Eichinvarianz besitzen.

Es ist nun naheliegend, diese Vorgehensweise auch auf unsere Problematik anzuwenden. Das bedeutet, daß wir dem Materiefeld \mathbf{B} ein neues Feld \mathbf{W} zuordnen müssen, so daß der Spinterm ${}^{(B)}\mathbf{t}$, welcher das Äquivalenzprinzip zerstört, durch geeignete, von \mathbf{W} stammende Terme, kompensiert wird. Daraus resultiert ein System von Feldern \mathbf{B} und \mathbf{W} , wobei deren kanonische Feldtheorie mit Hilfe des Äquivalenzprinzips konsistent vom flachen in den gekrümmten Raum übertragen werden kann.

Dieser Kompensationsmechanismus basiert auf einer engen Beziehung zwischen den Feldern \mathbf{B} , \mathbf{W} und der Metrik \mathbf{G} . Das Eichanalogon dieser Beziehung besteht in der gemeinsamen Eichinvarianz des Materie- und Kompensationsfeldes. Unser Ansatz ruht nun auf der Annahme, daß sich der Metriktensor \mathbf{G} aus den Feldern \mathbf{B} und \mathbf{W} zusammensetzt:³

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \epsilon^2 (B_{i\mu} B^i_{\nu} + W_{\mu} W_{\nu}) \\ &\equiv \mathcal{B}_{i\mu} \mathcal{B}^i_{\nu} + p_{\mu} p_{\nu} . \end{aligned} \tag{V.32}$$

Dieser Ausdruck enthält nun eine neue, die Interpretation des metrischen Feldes \mathbf{G} in der Allgemeinen Relativitätstheorie betreffende Philosophie! Bisher wurde die Metrik, abgesehen von der Konnexion $\mathbf{\Gamma}$, als *Potential* betrachtet. Dieser Standpunkt scheint für den unklaren Eichstatus der Einsteinschen Theorie verantwortlich zu sein[21]. Der Ansatz (V.32) ermöglicht es nun, dem metrischen Feld \mathbf{G} die Bedeutung eines *makroskopischen* Materiefeldes zu geben, welches durch die *mikroskopischen* Felder \mathbf{B} und \mathbf{W} erzeugt wird. Diese „doppelte“ Betrachtungsweise (makroskopisch und mikroskopisch) der Allgemeinen Relativitätstheorie führt nun zu einigen interessanten Fragen:

³Der konstante Längenparameter ϵ wird eingeführt um die Feldvariablen dimensionlos zu halten: $\mathcal{B} := \epsilon \mathbf{B}$, $\mathbf{p} = \epsilon \mathbf{W}$

1. Welche Gestalt muß die mikroskopische Dynamik besitzen, damit die folgende makroskopische Bedingung für \mathbf{G} erfüllt ist:

$$\nabla_\lambda G_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{V.33})$$

2. Besitzen die *mikroskopischen* Felder \mathbf{B} und \mathbf{W} einen *makroskopischen* Energie-Impulstensor \mathbf{T} , welcher in die rechte Seite der *makroskopischen* Feldgleichungen (V.1) eingesetzt werden kann? Ist dies dann konsistent mit dem Äquivalenzprinzip?

V.3 Die mikroskopische Dynamik

Um die erste Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß die Felder \mathbf{B} und \mathbf{W} auf mikroskopischem Niveau an weitere Felder koppeln, die jedoch nicht explizit in der Metrik \mathbf{G} auftauchen. Für die gegenwärtigen Betrachtungen beschränken wir uns auf den Fall einer reinen Selbstkopplung von \mathbf{B} und \mathbf{W} . Wir werden später sehen, daß wir mit dieser Einschränkung einen sehr speziellen Riemannschen Raum erhalten, nämlich einen Raum mit konstanter Krümmung. Unser Ansatz für die mikroskopischen Feldgleichungen lautet also:

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{B}_{i\mu} = \frac{1}{l} \mathcal{B}_{i\lambda} p_\mu + \frac{1}{L} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \quad (\text{V.34.a})$$

$$\nabla_\lambda p_\mu = -\frac{1}{l} \mathcal{B}_{i\mu} \mathcal{B}^i{}_\lambda \quad (\text{V.34.b})$$

Die konstanten Längenparameter l, L sind frei wählbar. Für $l, L \rightarrow \infty$ erhalten wir die Gleichungen für trivialisierbare Eichfelder (s. Kapitel III).

Wir wollen nun die Folgerungen, die sich aus den Gleichungen (V.34.a) und (V.34.b) ergeben, genau untersuchen. Man sieht leicht, daß die Bedingung (V.33) in der Tat erfüllt ist. Ferner erlauben die mikroskopischen Feldgleichungen die Auferlegung einer weiteren Bedingung:

$$\mathcal{B}_{i\mu} p^\mu = 0 . \quad (\text{V.35})$$

Wir können also annehmen, daß der charakteristische Vektor \mathbf{p} immer zeitartig ist, währen die drei raumartigen „Materiefelder“ \mathcal{B}_i , ($i = 1, 2, 3$) die sogenannte *charakteristische Distribution* $\overset{\cap}{\Delta}$ aufspannen. Weiter ersehen wir aus (V.34.a) und (V.34.b), daß der charakteristische Vektor der Gradient einer skalaren Funktion $\Theta(x)$ ist

$$p_\mu = \partial_\mu \Theta . \quad (\text{V.36})$$

Dieser Skalar kann als eine Art von „Universalzeit“ betrachtet werden, wobei die Integralflächen ($\Theta(x) = \text{const.}$) von $\overset{\cap}{\Delta}$ als „absoluter Raum“ interpretiert werden können. Da die Länge von \mathbf{p} wegen (V.35) und (V.34.b) konstant bleibt, können wir sie auf Eins normieren

$$G_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \equiv p^\mu p_\mu = 1 . \quad (\text{V.37})$$

Der Einheitsvektor \mathbf{p} läßt sich nun als Vierergeschwindigkeit eines sich bewegenden Mediums, dem sog. *Äther*, betrachten, dessen Energie-Impulstensor wir sogleich untersuchen wollen. Aus den Gleichungen (V.34.a), (V.34.b) und (V.35) entnehmen wir, daß die Stromlinien des Äthers, die sog. *charakteristischen Linien*, Geodäten sind:

$$p^\mu \nabla_\mu p_\nu = 0 . \quad (\text{V.38})$$

Ein Beobachter, der sich entlang der charakteristischen Linien frei bewegt, kann demzufolge bezüglich des Äthers als „lokal in Ruhe“ betrachtet werden. Die charakteristischen Linien sind aus diesem Grund die Weltlinien der Punkte des absoluten Raumes.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es nützlich, wenn wir die mikroskopischen Feldgleichungen (V.34.a) und (V.34.b) mit Hilfe des (Poincaré) Duals ${}^*\mathbf{p}$ von \mathbf{p} ausdrücken

$${}^*p_{\mu\nu\lambda} := \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\sigma . \quad (\text{V.39})$$

Der ϵ Tensor wird hierbei wie gewöhnlich definiert:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = \sqrt{-G} [\mu, \nu, \lambda, \sigma] \quad (\text{V.40})$$

$$(\nabla_\kappa \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0) \ ,$$

wobei die Klammer [...] das übliche Permutationssymbol bezeichnet. Alternativ läßt sich ${}^*\mathbf{p}$ mit Hilfe der \mathbf{B} Felder schreiben

$${}^*p_{\mu\nu\lambda} = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_{i\mu} \mathcal{B}_{j\nu} \mathcal{B}_{k\lambda} \ , \quad (\text{V.41})$$

woraus wir den topologischen Charakter innerhalb der $\text{SO}(3)$ Eichtheorie erkennen können („Gauß Strom“ [12]). Wir erhalten somit aus (V.34.a) und (V.34.b)

$$\nabla_\kappa {}^*p_{\mu\nu\lambda} = \frac{3}{l} {}^*p_{\kappa[\mu\nu} p_{\lambda]} \ . \quad (\text{V.42})$$

Hieraus folgert man leicht, daß die Divergenz von ${}^*\mathbf{p}$ verschwindet:

$$\nabla^\mu {}^*p_{\mu\nu\lambda} = 0 \ . \quad (\text{V.43})$$

Wir werden später sehen, daß das Objekt ${}^*\mathbf{p}$ im Kompensationsmechanismus eine wichtige Rolle spielt.

V.4 Der Energie-Impuls des Vakuums

Wenden wir uns nun der zweiten Frage zu, so müssen wir untersuchen, ob die mikroskopischen Konstituenten \mathbf{B} und \mathbf{p} der Metrik \mathbf{G} einen Energie-Impulstensor \mathbf{T} erzeugen. Wenn dies der Fall ist, so wird der Energie-Impuls, nach den Einsteinschen Gleichungen (V.1), eine Krümmung \mathbf{R} der Raum-Zeit erzeugen. Diese Vermutung läßt sich nachprüfen, indem wir beide Seiten der Einsteinschen Feldgleichung berechnen und uns überzeugen, daß sie übereinstimmen. In diesem Abschnitt wollen wir nun die rechte Seite der Feldgleichungen berechnen. Auf diese Weise werden wir sehen, wie der Kompensationsmechanismus wirkt.

Es liegt nahe den Energie-Impulstensor \mathbf{T} der mikroskopischen Felder \mathbf{B} und \mathbf{W} aus den korrespondierenden dynamischen Gleichungen (V.34.a) und (V.34.b) herzuleiten, indem wir \mathbf{T} im flachen Raum konstruieren und dann mittels des Äquivalenzprinzips in den gekrümmten Raum übertragen. Leider ist das jetzt nicht mehr möglich! Der Grund liegt darin, daß die Gleichungen (V.34.a) und (V.34.b) im flachen Raum inkonsistent sind. Um dies zu sehen, berechnen wir die alternierende Ableitung von \mathbf{p}

$$\nabla_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}p_{\mu} = -\frac{1}{l^2}\mathcal{B}_{i\mu}\mathcal{B}^i_{[\sigma}p_{\lambda]} \quad . \quad (\text{V.44})$$

woraus offensichtlich im flachen Raum ($\nabla \rightarrow \partial$) ein Widerspruch entsteht!

Erinnern wir uns jedoch an die Klein-Gordon Gleichung (V.13), welche zweiter Ordnung ist, und für die wir ohne Schwierigkeiten einen assoziierten Energie-Impulstensor konstruieren können (vgl.(V.15) und (V.16)). Wir werden deshalb versuchen, Gleichungen zweiter Ordnung aus den Gleichungen erster Ordnung herzuleiten. In der Tat erhalten wir so die Klein-Gordon Gleichung für \mathbf{B} , vorausgesetzt die Comptonwellenlänge \mathcal{L} (V.14) gehorcht der Bedingung

$$\frac{1}{\mathcal{L}^2} = \frac{1}{l^2} - \frac{2}{L^2} \quad . \quad (\text{V.45})$$

Ebenso genügt auch das charakteristische Vektorfeld \mathbf{p} einer Feldgleichung vom Klein-Gordon Typ:

$$\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}p_{\mu} = -\frac{3}{l^2}p_{\mu} \quad . \quad (\text{V.46})$$

Es ist nun naheliegend, für das korrespondierende Boson eine Masse m einzuführen:

$$m = \sqrt{3}\frac{\hbar}{lc} \quad . \quad (\text{V.47})$$

Obwohl die mikroskopischen Felder in den Gleichungen zweiter Ordnung entkoppelt sind, besteht doch eine schwache Wechselwirkung über die Raum-Zeit Geometrie, zu welcher beide Felder über die Metrik \mathbf{G} (V.32) beitragen.

Die Energie-Impulstensenoren für die Dynamik zweiter Ordnung lassen sich nun leicht angeben: Außer dem Ergebnis (V.15) für $^{(B)}\mathbf{T}$ finden wir für den kanonischen Energie-Impulstensor $^{(W)}\mathbf{T}$ des \mathbf{W} Feldes

$$^{(W)}T^{\rho\kappa} = \frac{1}{4\pi} (\nabla^\rho W_\nu) (\nabla^\kappa W^\nu) - G^{\rho\kappa} \Lambda_W \quad (\text{V.48})$$

$$\Lambda_W = \frac{1}{8\pi} \left((\nabla_\mu W_\nu) (\nabla^\mu W^\nu) - \frac{3}{l^2} W^\mu W_\mu \right) . \quad (\text{V.49})$$

Wie erwartet verschwindet die Divergenz von $^{(W)}\mathbf{T}$ nicht, sondern ergibt analog zu (V.17)

$$\nabla_\rho ^{(W)}T^{\rho\kappa} = -\frac{1}{2}R^\kappa_{\nu\mu\rho} ^{(W)}\Sigma^{\nu\mu\rho} \quad (\text{V.50.a})$$

$$^{(W)}\Sigma^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} ((\nabla^\nu W^\mu) W^\rho - (\nabla^\nu W^\rho) W^\mu) . \quad (\text{V.50.b})$$

Da nun die einzelnen Energie-Impulstensenoren bekannt sind, können wir den gesamten Energie-Impulstensor \mathbf{T} des Äthers aufstellen:

$$T^{\rho\kappa} = ^{(F)}\mathcal{T}^{\rho\kappa} + ^{(B)}T^{\rho\kappa} + ^{(W)}T^{\rho\kappa} . \quad (\text{V.51})$$

Wir können \mathbf{T} nun für einen ersten Test der Kompensation benützen, welche, wenn sie funktioniert, folgendes Resultat ergeben muß

$$\nabla_\rho T^{\rho\kappa} = 0 . \quad (\text{V.52})$$

Aus (V.50.a) und (V.20) erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\rho\kappa} &= -\frac{1}{2}R^\kappa_{\nu\mu\rho} \Sigma^{\nu\mu\rho} \\ (\Sigma^{\rho\mu\nu} &:= ^{(B)}\Sigma^{\rho\mu\nu} + ^{(W)}\Sigma^{\rho\mu\nu}) , \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

wobei die rechte Seite nicht von vornherein verschwindet. Verwenden wir aber die Gleichungen erster Ordnung für die gesamte Spindichte Σ ($\Sigma = ^{(B)}\Sigma + ^{(W)}\Sigma$), so ergibt sich hierfür

$$\Sigma^{\rho\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi\epsilon^2 L} {}^*p^{\nu\mu\rho} . \quad (\text{V.54})$$

Benützen wir weiter die erste Bianchi Identität (III.62.a), so erhalten wir doch noch das gewünschte Ergebnis (V.52). Dies ist der erste Erfolg des Kompensationsmechanismus in Verbindung mit den Gleichungen erster Ordnung (V.34.a), (V.34.b). Man beachte, daß sich die Spindichten Σ der \mathbf{B} und \mathbf{W} Felder nicht zu Null aufzusummieren brauchen; *es genügt wenn der gesamte Spin proportional einem axialen Vektor ist.*

Wir können nun, ohne auf einen Widerspruch zu stoßen, den kanonischen Tensor \mathbf{T} des Ätherfeldsystems für die Einstein Gleichungen verwenden. Dieses Ergebnis besagt nun zunächst noch nicht daß \mathbf{T} mit seinem modifizierten Analogon \mathcal{T} aus Gleichung (V.21) übereinstimmt: Betrachten wir dazu den modifizierten Tensor $^{(F)}\mathcal{T}$ für das \mathbf{W} Feld, so unterscheidet sich dieser von seinem kanonischen Analogon $^{(W)}\mathbf{T}$ (V.48) durch einen Korrekturterm $^{(W)}\mathbf{t}$

$$^{(F)}\mathcal{T}_{\rho\kappa} = ^{(W)}T_{\rho\kappa} + ^{(W)}t_{\rho\kappa} , \quad (\text{V.55})$$

welcher analog zu $^{(B)}\mathbf{t}$ aufgebaut ist:

$$^{(W)}t^{\rho\kappa} = -\frac{1}{2}\nabla_{\nu} \left(^{(W)}\Sigma^{\rho\nu\kappa} + ^{(W)}\Sigma^{\kappa\nu\rho} - ^{(W)}\Sigma^{\kappa\rho\nu} \right) . \quad (\text{V.56})$$

Da auch dieser Korrekturterm eingeführt wurde um die nicht verschwindende Divergenz von \mathbf{T} zu beseitigen, muß er im allgemeinen Fall ungleich Null sein. Diese Tatsache können wir nun benützen, um den Kompensationsmechanismus auf den gesamten modifizierten Tensor \mathcal{T} anzuwenden:

$$\mathcal{T}_{\rho\kappa} = ^{(F)}\mathcal{T}_{\rho\kappa} + ^{(B)}\mathcal{T}_{\rho\kappa} + ^{(F)}\mathcal{T}_{\rho\kappa} . \quad (\text{V.57})$$

Dieser Tensor unterscheidet sich von seinem kanonischen Analogon \mathbf{T} durch einen Korrekturterm \mathbf{t}

$$\mathcal{T}_{\rho\kappa} = T_{\rho\kappa} + t_{\rho\kappa} , \quad (\text{V.58})$$

welcher sich aus der Summe der einzelnen Korrekturterme $^{(W)}\mathbf{t}$ und $^{(B)}\mathbf{t}$ zusammensetzt

$$t^{\rho\kappa} = -\frac{1}{2}\nabla_{\nu} \left(\Sigma^{\rho\nu\kappa} + \Sigma^{\kappa\nu\rho} - \Sigma^{\kappa\rho\nu} \right) . \quad (\text{V.59})$$

Benützen wir nun das Ergebnis (V.54) für Σ , so erhalten wir aufgrund von (V.43) unmittelbar die Identität der beiden Energie-Impulstensoren:

$$\mathcal{T}_{\rho\kappa} \equiv T_{\rho\kappa} \quad (\text{V.60})$$

Wir sehen, daß das Kompensationsprinzip in Verbindung mit den Feldgleichungen erster Ordnung all die erwähnten Inkonsistenzen beseitigt!

Bevor wir nun den Energie-Impulstensor \mathbf{T} in die Einsteinschen Feldgleichungen einsetzen, wollen wir uns noch mit dessen speziellen Eigenschaften beschäftigen. Es lassen sich nämlich alle Ableitungen erster Ordnung der Felder durch die Felder selber ausdrücken. Da die Lagrangeterme Λ_B (V.16) und Λ_W (V.49) identisch verschwinden, erhalten wir für die kanonischen Energie-Impulstensoren

$$^{(B)}T_{\rho\kappa} = -\frac{1}{4\pi\mathcal{C}^2\mathcal{L}^2}\mathcal{B}_{\rho\kappa} \quad (\text{V.61.a})$$

$$^{(W)}T_{\rho\kappa} = \frac{1}{4\pi\mathcal{C}^2\mathcal{I}^2}\mathcal{B}_{\rho\kappa} . \quad (\text{V.61.b})$$

Hierbei haben wir den Projektor \mathcal{B} der charakteristischen Distribution Δ^\cap benutzt

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\rho\kappa} &= \mathcal{B}_{i\rho}\mathcal{B}^i{}_\kappa \\ (\mathcal{B}_{\rho\kappa}\mathcal{B}^\kappa{}_\lambda &= \mathcal{B}_{\rho\lambda}) . \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

Um die physikalische Bedeutung dieser Tensoren zu zeigen, nehmen wir an, daß der Äther eine ideale Flüssigkeit ist und folgenden Energie-Impulstensor besitzt

$$\begin{aligned} ^{(\text{id})}T_{\mu\nu} &= (\mathcal{M} + \mathcal{P})p_\nu p_\mu - \mathcal{P}G_{\mu\nu} \\ &\equiv \mathcal{M}p_\mu p_\nu - \mathcal{P}\mathcal{B}_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{V.63})$$

Vergleichen wir dies mit den Tensoren aus (V.61.a) und (V.61.b), so sehen wir daß die zeitartigen Konstituenten des Äthers einen negativen (konstanten) Druck produzieren

$$^{(W)}\mathcal{P} = -\frac{1}{4\pi\mathcal{C}^2\mathcal{I}^2} , \quad (\text{V.64})$$

während der Druck der raumartigen Konstituenten positiv ist

$${}^{(B)}\mathcal{P} = +\frac{1}{4\pi c^2 \mathcal{L}^2} . \quad (\text{V.65})$$

Es scheint nun etwas sonderbar zu sein, daß keine der beiden Konstituenten zur Energiedichte \mathcal{M} des Äthers beiträgt. Wir werden jedoch sehen, daß nur der gesamte Energie-Impulstensor \mathbf{T} , welcher den Eichteil ${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}$ (V.5) enthält, eine physikalische Bedeutung besitzt. Bevor wir den Einfluß von ${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}$ auf \mathbf{T} untersuchen, müssen wir uns mit dem Yang-Mills Feld \mathbf{F} beschäftigen.

V.5 Das Eichfeld

Das in (V.8) benützte Eichpotential \mathbf{A} beeinflußt nun die Metrik \mathbf{G} nicht direkt. Trotzdem ist es möglich, daß das Eichfeld \mathbf{A} über den Energie-Impulstensor ${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}$ (V.5) die Krümmung \mathbf{R} beeinflußt. Da wir \mathcal{T} für die Einstein-Gleichungen (V.1) benötigen, müssen wir ihn analog zu ${}^{(B)}\mathbf{T}$ und ${}^{(W)}\mathbf{T}$ mit Hilfe des charakteristischen Vektors \mathbf{p} und dem Projektor \mathcal{B} (V.62) ausdrücken.

Wir wählen für die Feldstärke \mathbf{F} (V.11) folgenden Ansatz

$$F_{i\mu\nu} = f_{||} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + f_{\perp} (\mathcal{B}_{i\mu} p_{\nu} - \mathcal{B}_{i\nu} p_{\mu}) . \quad (\text{V.66})$$

Die Konstanten $f_{||}$ und f_{\perp} müssen wir nun bestimmen. Die erste Forderung, die der Ansatz (V.66) erfüllen muß, ist die Bianchi Identität

$$\mathcal{D}_{[\lambda} F_{i\mu\nu]} = 0 . \quad (\text{V.67})$$

Da die kovariante Ableitung aller Objekte in \mathbf{F} aufgrund der mikroskopischen Gleichungen bekannt ist, kann die kovariante Ableitung von \mathbf{F} direkt mit Hilfe der Ätherfelder ausgedrückt werden:

$$\mathcal{D}_{\lambda} F_{i\mu\nu} = 2 \left(\frac{f_{||}}{L} + \frac{f_{\perp}}{l} \right) \mathcal{B}_{i[\nu} \mathcal{B}_{\mu]\lambda} + 2 \left(\frac{f_{||}}{l} - \frac{f_{\perp}}{L} \right) \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\lambda} \mathcal{B}_{k[\nu} p_{\mu]} . \quad (\text{V.68})$$

Die Bianchi-Identität (V.67) kann jedoch nur dann erfüllt werden, wenn der zweite Term auf der rechten Seite von (V.68) verschwindet, d.h.

$$f_{\perp} = \frac{L}{l} f_{\parallel} . \quad (\text{V.69})$$

Die Feldstärke nimmt daher folgende Gestalt an (wir setzen $f_{\parallel} \equiv f$)

$$F_{i\mu\nu} = f \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{j\mu} \mathcal{B}_{k\nu} + 2f \frac{L}{l} \mathcal{B}_{i[\mu} p_{\nu]} . \quad (\text{V.70})$$

Die nächste Bedingung, welcher \mathbf{F} gehorchen muß, ist die inhomogene Yang-Mills Gleichung (V.12). Benützen wir das Ergebnis (V.70), so erhalten wir für \mathbf{F}

$$\mathcal{D}^{\mu} F_{i\mu\nu} = -f \left(1 + \frac{L^2}{l^2} \right) \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{i\mu} (\mathcal{D}_{\nu} \mathcal{B}_k^{\mu}) ; \quad (\text{V.71})$$

dadurch wird die Größe f fixiert:

$$f = \epsilon^{-2} \left(1 + \frac{L^2}{l^2} \right)^{-1} . \quad (\text{V.72})$$

Nachdem nun die Feldstärke \mathbf{F} bekannt ist, können wir den von \mathbf{F} produzierten Energie-Impulsinhalt $^{(F)}\mathcal{T}$ untersuchen. Wir erhalten mit Hilfe von (V.69) und (V.72) aus (V.5):

$$^{(F)}\mathcal{T}_{\rho\kappa} = \frac{1}{8\pi \left(1 + \frac{L^2}{l^2} \right) \epsilon^4} (3p_{\rho} p_{\kappa} - \mathcal{B}_{\rho\kappa}) . \quad (\text{V.73})$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit dem Tensor $^{(\text{id})}\mathbf{T}$ (IV.26), so erhalten wir für den Druck $^{(F)}\mathcal{P}$ und die Energiedichte $^{(F)}\mathcal{M}$ des Eichfeldes

$$^{(F)}\mathcal{P} = \frac{1}{3} \ ^{(F)}\mathcal{M} = \frac{1}{8\pi \left(1 + \frac{L^2}{l^2} \right) \epsilon^4} . \quad (\text{V.74})$$

Dies ist nun gerade die Zustandsgleichung für ein Gas aus masselosen Teilchen (nämlich den masselosen Eichbosonen \mathbf{A} , welche die Wechselwirkung der \mathbf{B} Bosonen in der quantisierten Theorie vermitteln). Ein weiterer interessanter Aspekt zeigt

sich, wenn wir uns den gesamten Energie-Impulstensor \mathbf{T} (V.51) anschauen. Dieser ergibt sich mit (V.61.a),(V.61.b) und (V.73) zu

$$T_{\rho\kappa} = \frac{3}{8\pi\epsilon^4 \left(1 + \frac{L^2}{l^2}\right)} p_\rho p_\kappa + \frac{1}{8\pi\epsilon^2} \left(\frac{4}{L^2} - \frac{1}{\epsilon^2 \left(1 + \frac{L^2}{l^2}\right)} \right) \mathcal{B}_{\rho\kappa} . \quad (\text{V.75})$$

Wenn der Längenparameter ϵ , den wir von Hand in die Theorie eingefügt hatten, den folgenden Wert annimmt:

$$\epsilon = L \left(1 + \frac{L^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}} , \quad (\text{V.76})$$

so wird der gesamte Energie-Impulstensor proportional dem Metriktensor \mathbf{G}

$$T_{\rho\kappa} = \frac{3}{8\pi} \frac{1 + \frac{L^2}{l^2}}{L^4} G_{\rho\kappa} . \quad (\text{V.77})$$

Ein Tensor dieser Art wird üblicherweise für das Quantenvakuum angesetzt! [23].

Wir können nun den Äther als Quantenvakuum identifizieren, wobei die mikroskopischen Felder \mathbf{B} und \mathbf{W} die Vakuumserwartungswerte der entsprechenden Quantenfelder sind. Der interessante Punkt dabei ist, daß der Längenparameter ϵ den speziellen Wert (V.76) annehmen *muß*. Diese Tatsache wird wichtig, wenn wir die linke Seite der Einstein-Gleichung (V.1) untersuchen.

V.6 Die geometrische Struktur des Vakuums

Die mikroskopische Dynamik bestimmt nun nicht nur den Energie-Impulsinhalt der mikroskopischen Felder, sondern auch die Geometrie des Raumes in dem sich diese Felder befinden. Wie wir gesehen haben sind die Gleichungen erster Ordnung im flachen Raum inkonsistent. Aus diesem Grund benötigen wir einen gekrümmten Raum in dem sie konsistent wirken können. Um diesen Raum zu finden, müssen wir dessen Krümmung \mathbf{R} konstruieren, so daß die allgemeine Identität

$$\nabla_{[\sigma} \nabla_{\lambda]} p_{\mu} = -\frac{1}{2} R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} p_{\rho} \quad (\text{V.78})$$

mit der Gleichung (V.44), welche eine notwendige Integrabilitätsbedingung für die mikroskopischen Felder darstellt, verträglich ist.

Obige Gleichung legt, wenn sie auf (V.44) angewandt wird, die Riemannsche Krümmung \mathbf{R} nicht eindeutig fest. Deshalb zerlegen wir \mathbf{R} in zwei Teile

$$R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} = {}^{\parallel}R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} + {}^{\perp}R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} , \quad (\text{V.79})$$

wobei der erste Term parallel zur charakteristischen Distribution ist

$${}^{\parallel}R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} p_{\rho} = 0 . \quad (\text{V.80})$$

Der übrigbleibende Term ${}^{\perp}\mathbf{R}$ wird dann durch (V.44), (V.78) eindeutig festgelegt und hat folgende Gestalt:

$${}^{\perp}R^{\rho\mu}_{\sigma\lambda} = \left(\frac{2}{l}\right)^2 p^{[\rho} \mathcal{B}^{\mu]}_{[\sigma} p_{\lambda]} . \quad (\text{V.81})$$

Auf ähnliche Weise läßt sich ${}^{\parallel}\mathbf{R}$ finden. Wir müssen dazu nur die alternierenden Ableitungen der raumartigen Felder \mathcal{B} anstelle der zeitartigen \mathbf{p} verwenden und erhalten

$$D_{[\sigma} D_{\lambda]} \mathcal{B}_{i\mu} = \frac{1}{2} R^{\rho}_{\mu\sigma\lambda} + \left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{L^2}\right) \mathcal{B}_{i[\sigma} \mathcal{B}_{\lambda]\mu} + \frac{1}{l^2} p_{\mu} \mathcal{B}_{i[\sigma} p_{\lambda]} + \frac{1}{lL} \epsilon_i{}^{jk} \mathcal{B}_{k\mu} \mathcal{B}_{j[\sigma} p_{\lambda]} . \quad (\text{V.82})$$

Benützen wir die allgemeingültige Gleichung

$$D_{[\sigma} D_{\lambda]} \mathcal{B}_{i\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} F_{j\sigma\lambda} \mathcal{B}_{k\mu} \quad (\text{V.83})$$

für die linke Seite von (V.82), so läßt sich (V.83) mit Hilfe von (V.70) auch folgendermaßen formulieren

$$D_{[\sigma} D_{\lambda]} \mathcal{B}_{i\mu} = f \mathcal{B}_{i[\sigma} \mathcal{B}_{\lambda]\mu} + \frac{fL}{l} \epsilon_i^{jk} \mathcal{B}_{k\mu} \mathcal{B}_{j[\sigma} p_{\lambda]} . \quad (\text{V.84})$$

Vergleichen wir nun die Gleichungen (V.82) und (V.84) miteinander, so können wir einige wichtige Schlußfolgerungen ziehen: Da die rechten Seiten beider Gleichungen identisch sein müssen, muß der Parameter f den Wert

$$f = \frac{1}{L^2} \quad (\text{V.85})$$

annehmen. Kombiniert man diese Forderung mit (V.72), so ergibt sich gerade der spezielle Wert (V.76) für den Längenparameter ρ ! Ferner hebt sich der orthogonale Anteil ${}^\perp \mathbf{R}$ (V.81) in (V.82) heraus, und nur der parallele Teil ${}^\parallel \mathbf{R}$ bleibt übrig

$${}^\parallel R^\rho{}_{\mu\sigma\lambda} = \frac{2}{l^2} \mathcal{B}^\rho{}_{[\lambda} \mathcal{B}_{\sigma]\mu} . \quad (\text{V.86})$$

Es sind nun beide Teile ${}^\parallel \mathbf{R}$ und ${}^\perp \mathbf{R}$ bekannt, und wir können \mathbf{R} angeben:

$$R^\rho{}_{\mu\sigma\lambda} = \frac{2}{l^2} G^\rho{}_{[\lambda} G_{\sigma]\mu} . \quad (\text{V.87})$$

Dieser Krümmungstensor gehört zu einem Raum konstanter Krümmung.

Nachdem wir nun die Geometrie des Riemannschen Raumes bestimmt haben, läßt sich die linke Seite der Einstein-Gleichung (V.1) angeben. Berechnen wir zuerst den Ricci Tensor

$$R_{\mu\lambda} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\lambda} = -\frac{3}{l^2} G_{\mu\lambda} , \quad (\text{V.88})$$

und den Krümmungsskalar

$$R \equiv R^\lambda{}_\lambda = -\frac{12}{l^2} , \quad (\text{V.89})$$

so erhalten wir für den Einstein-Tensor \mathbf{E}

$$E_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R G_{\mu\nu} = \frac{3}{l^2}G_{\mu\nu} . \quad (\text{V.90})$$

Offensichtlich ist hier \mathbf{E} proportional zum gesamten Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T} (V.77), sodaß die Einsteinschen Feldgleichungen (V.1) automatisch erfüllt sind, vorausgesetzt zwischen den Längenparametern L, l und der Plancklänge L_p gilt die folgende Beziehung

$$L_P^2 = L^2 \frac{L^2}{L^2 + l^2} . \quad (\text{V.91})$$

Dieses Ergebnis scheint den Gleichungen erster Ordnung (V.34.a) und (V.34.b) in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine tiefere Bedeutung zu geben. Denn die mikroskopischen Gleichungen vermögen sowohl die Feldgleichungen zweiter Ordnung als auch die Raum-Zeit Geometrie so zu bestimmen, daß die herkömmliche und die in diesem Kapitel dargelegte Vorgehensweise innerhalb der Einsteinschen Theorie übereinstimmen. Wir können uns sogar auf den Standpunkt stellen, daß die Einsteinschen Gleichungen aus den Gleichungen erster Ordnung *ableitbar* sind. Dabei werden zusätzlich die Schwierigkeiten in der Wahl des richtigen Energie-Impulstensors elegant beseitigt.

Es ist wichtig sich vor Augen zu halten, daß die Argumentation, welche von der mikroskopischen Dynamik zu den makroskopischen Einsteinschen Gleichungen führt, nicht umkehrbar ist. Denn geht man von den Einsteinschen Gleichungen (V.1) mit dem Energie-Impulstensor \mathbf{T} (V.57) aus, so erhält man nicht notwendigerweise die mikroskopischen Gleichungen (V.34.a) und (V.34.b), die daher als eine sehr spezielle Lösung der gekoppelten Einstein-Klein-Gordon Gleichung anzusehen sind. Außerdem fordert man in der Einsteinschen Theorie die Bedingung, daß der Raum flach wird ($G_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$) wenn der gesamte Energie-Impuls-Inhalt des Universums verschwindet. Dies läßt sich nun aber mit unserer Betrachtungsweise nicht vereinbaren, denn läßt man alle Ätherfelder \mathbf{F} , \mathbf{B} und \mathbf{W} gegen Null gehen, so strebt die

Metrik \mathbf{G} (V.32) ebenfalls gegen Null und zerstört den metrischen Charakter der Raum-Zeit Mannigfaltigkeit. Das heißt es ist in der vorliegenden Theorie kein flaches Universum denkbar, welches völlig frei von jeglicher physikalischer Dynamik existieren könnte.

Die Gleichung (V.91) zeigt nochmals auf einfache Weise den Zusammenhang der drei verschiedenen Längenskalen unserer Gravitationstheorie auf. Der Längenparameter L definiert aufgrund von (IV.50) eine typische Längenskala für das $\text{SO}(3)$ Vektorfeld \mathbf{C} , die nach unserer allgemeinen Philosophie in Kapitel 2 zwischen der kosmischen Skala ($l \approx 10^{28} \text{cm}$) und der Planck-Länge L_p ($\approx 10^{-33} \text{cm}$) liegen muß. In der Tat findet man aus (V.91)

$$L \approx \sqrt{L_p l} \approx 10^{-2} \text{cm} \quad (\text{V.92})$$

Dieser Wert ist in Einklang mit unserer Vorstellung, daß das \mathbf{C} -Feld die Gravitationsphänomene im Zwischenbereich zwischen dem kosmischen und dem Quantenmaßstab beschreiben sollte.

Kapitel VI

Riemannsche Struktur von trivialisierbaren Eichfeldern

Der erste Vakuum-Kandidat in Abschnitt IV.1 hat sich dadurch ausgezeichnet, daß die Riemannsche Konnexion Γ der 4-dimensionalen Raum-Zeit mit der Oberflächen-Konnexion $\overset{\cap}{\Gamma}$ übereinstimmte. Diese spezielle Eigenschaft der Riemannschen Geometrie war hinreichend für die Parallelisierbarkeit der Raum-Zeit. Anschaulich gesprochen bedeutet diese Parallelisierbarkeit, daß man sich die Riemannschen Objekte (wie z.B. die Metrik \mathbf{G}) als ein Feld von Größen über dem (pseudo-) Euklidischen Raum vorstellen kann, d.h. die entsprechende Riemannsche Geometrie darf man sich als eine Feldtheorie im üblichen Sinne über dem flachen Raum vorstellen. In diesem Fall — *aber auch nur in diesem* — kann man also den physikalischen Inhalt der Allgemeinen Relativitätstheorie dahingehend modifizieren, daß man die Riemannsche Struktur als ein reines Bewegungsgesetz für gravitierende Materie im *flachen* Raum versteht, ganz ähnlich wie die Maxwellsche Elektrodynamik die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes und die Bewegung der elektrischen Ladungen im flachen Raum beschreibt. Bei dieser Interpretation der Einsteinschen Gravitationstheorie verliert die Gravitationskraft anscheinend ihre Sonderstellung

unter den übrigen Grundkräften der Natur, weil die von Einstein so erfolgreich durchgeführte Geometrisierung der Gravitationskraft wieder verloren geht! Es gibt sogar Autoren [29], die diesen „*entgeometrisierenden*“ Standpunkt gegenüber der *gesamten* Relativitätstheorie Einsteins in ihrem vollen Umfang einnehmen und damit bezweifeln, daß Masse und Energie das Raum-Zeit-Kontinuum wirklich krümmen. Diese Auffassung ist aber von kompetenter Seite zurückgewiesen worden [28] und hat sich in der Literatur nicht durchgesetzt.

Aber selbst in dem hier vorliegenden Spezialfall des ersten Vakuum-Kandidaten in Abschnitt IV.1, bei dem die entgeometrisierende Sichtweise berechtigt erscheint, können wir zeigen, daß die Riemannsche Struktur über dem flachen Raum dennoch eine geometrische Bedeutung hat! Diese muß sich naturgemäß auf eine gewisse Eigenschaft des *flachen Raumes* beziehen, was angesichts dessen trivialer Geometrie verwunderlich erscheinen mag: wie kann ein „*flacher*“ Raum eine „*Krümmung*“ hervorbringen? Die Antwort ist einfach: durch das in Kapitel 2 beschriebene *lokale Aufspaltungs-Prinzip*. Das heißt, in jedem Punkt \mathbf{x} der Mannigfaltigkeit existiert eine ausgezeichnete Zeitrichtung $\hat{\mathbf{n}}_x$, die einen entsprechenden 3-dimensionalen Unterraum $\overline{\Delta}_x$ erzeugt. (Man beachte, daß es sich hier nicht um die charakteristische Aufspaltung $(\mathbf{p}_x, \overset{\cap}{\Delta}_x)$ handelt.)

Im folgenden werden wir Schritt für Schritt die von dieser (1+3)-Aufspaltung des flachen Raumes erzeugte Riemannsche Geometrie aufbauen.

VI.1 Das inverse Problem und trivialisierbare SO(3) Eichfelder

Das inverse Problem bezüglich der *Euklidischen Foliation eines Riemannschen Raumes* besteht darin, den Euklidischen Raum so aufzublättern, daß eine Riemannsche Struktur entsteht. Man könnte diesen Prozeß die *Riemannsche Foliation eines*

Euklidischen Raumes nennen. Eine Foliation dieser letzten Art wird durch ein $\mathcal{SO}(3)$ Eichpotential \mathbf{A} und einen zugehörigen Eichvektor \mathbf{B} beschrieben, wobei beide eine trivialisierbare Eichfeld-Konfiguration bestimmen. Es wird sich jedoch zeigen, daß wir nur bei einer integrierbaren charakteristischen Distribution $\overset{\circ}{\Delta}$ zu einer rein Riemannschen Struktur gelangen. Im nicht-integrierbaren Fall liegt eine Riemann-Cartan Struktur vor, das heißt der entsprechende Raum besitzt eine nicht-verschwindende Torsion. Zuerst wollen wir aber einige geometrische Begriffe für trivialisierbare Eichfelder näher erläutern.

Wir können stets über \mathbf{E}_4 bzw \mathbf{M}_4 als Basisraum ein triviales Prinzipalbündel $\overset{\circ}{\lambda}_4$ bilden, welches die verschwindende Krümmung $\overset{\circ}{\Omega}$ und die flache Konnexion $\overset{\circ}{\omega}$ besitzt. $\overset{\circ}{\omega}$ läßt sich folgendermaßen nach den \mathbf{A} und \mathbf{B} zerlegen

$$\overset{\circ}{\omega} = \mathbf{A}_i L^i + \mathbf{B}_i l^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{VI.1})$$

wobei L^i und l^i mit Hilfe der $\mathcal{SO}(4)$ bzw. $\mathcal{SO}(1,3)$ Standardgeneratoren zu bilden sind [9]. Nach Voraussetzung verschwindet die $\overset{\circ}{\lambda}_4$ Bündelkrümmung

$$\overset{\circ}{\Omega}_{\mu\nu} = \partial_\mu \overset{\circ}{\omega}_\nu - \partial_\nu \overset{\circ}{\omega}_\mu + [\overset{\circ}{\omega}_\mu, \overset{\circ}{\omega}_\nu] = 0 . \quad (\text{VI.2})$$

Setzen wir hier nun die Zerlegung (VI.1) ein, und führen eine „innere“ $\text{SO}(3)$ Krümmung \mathbf{F} ein

$$F_{i\mu\nu} = \partial_\mu A_{i\nu} - \partial_\nu A_{i\mu} + \epsilon_i^{jk} A_{j\mu} A_{k\nu} , \quad (\text{VI.3})$$

so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich für \mathbf{A} und \mathbf{B}

$$F_{i\mu\nu} = g_{00} \epsilon_i^{jk} B_{j\mu} B_{k\nu} \quad (\text{VI.4.a})$$

$$D_\mu B_{i\nu} = D_\nu B_{i\mu} \quad (\text{VI.4.b})$$

Diese Gleichungen sind nun gerade die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Trivialisierbarkeit der $\text{SO}(3)$ Eichfelder \mathbf{A} . Durch die Mitnahme von g_{00} in

(VI.4.a) berücksichtigen wir, daß die Trivialisierbarkeit sowohl über den Basisräumen \mathbf{E}_4 als auch \mathbf{M}_4 erklärt werden kann.

Errichtet man nun an einem beliebigen Punkt in diesem Basisraum ein Vierbein $(\hat{e}_0^\mu \equiv \hat{n}_\mu, e_i^\mu)$, welches folgende Orthonormalitätsbedingungen erfüllt:

$$\hat{n}_\mu e^\mu_i = 0 \quad (\text{VI.5.a})$$

$$g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j = g_{ij} , \quad (\text{VI.5.b})$$

so definiert \hat{n}_μ als Normalenvektor die sog. repräsentative Distribution $\overline{\Delta}$, welche dann von den drei e^μ_i aufgespannt wird. \mathbf{A} und \mathbf{B} lassen sich nun durch diese Vektorfelder ausdrücken. Um dies zu zeigen bemerken wir, daß die Konnexion $\overset{\circ}{\omega}$ von $\overset{\circ}{\lambda}_4$ die Änderung dieses Vierbeins bei Parallelverschiebung beschreibt:

$$\partial_\lambda \mathbf{e}_\mu = \overset{\circ}{\omega}^\gamma_{\mu\lambda} \mathbf{e}_\gamma . \quad (\text{VI.6})$$

Mit Hilfe der Zerlegung (VI.1) erhalten wir daraus¹

$$A_{i\mu} = \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} \epsilon^{jk}_i e^\lambda_j \partial_\mu e^\nu_k \quad (\text{VI.7.a})$$

$$B_{i\mu} = g_{00} g_{\lambda\nu} e^\lambda_i \partial_\mu \hat{n}^\nu , \quad (\text{VI.7.b})$$

was sich durch direktes Einsetzen in die Trivialisierungsbedingungen (VI.4.a) und (VI.4.b) verifizieren läßt. Wir sehen nun, daß \mathbf{A} die Verschiebung des Dreibeins \mathbf{e}_μ innerhalb $\overline{\Delta}$ regelt, während \mathbf{B} den Verlauf des Normalenvektorfeldes $\hat{\mathbf{n}}$ kennzeichnet. $\hat{\mathbf{n}}$ und damit $\overline{\Delta}$ sind $\text{SO}(3)$ eichinvariant, da $\text{SO}(3)$ nur auf die e^μ_i wirkt und $\overline{\Delta}$ in sich überführt.[9]

Weiter definieren wir die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$, die von den $B_{i\mu}$ aufgespannt werden soll. Der charakteristische Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ fungiert hierbei als Normalenvektor,

¹Wir beschreiben hier gleichzeitig die Aufspaltung der (pseudo-) Euklidischen Räume $\mathbf{E}_4, \mathbf{M}_4$ (Metrik: $g = \text{diag}(\overset{+}{-} 1, -1, -1, -1)$)

das heißt es gilt

$$B_{i\mu}\hat{p}^\mu = 0 . \quad (\text{VI.8})$$

$\hat{\Delta}$ ist ebenfalls $\text{SO}(3)$ invariant. Denn aufgrund des tensoriellen Verhaltens von \mathbf{B} unter $\text{SO}(3)$ Eichtransformationen sind die umgekehrten \mathbf{B}' nur Linearkombinationen der alten \mathbf{B} . Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den beiden Distributionen $\hat{\Delta}$ und $\bar{\Delta}$ untersuchen. Aus der Orthogonalitätsbedingung (VI.8) und Gleichung (VI.7.b) erhalten wir

$$(\hat{p}^\mu \partial_\mu \hat{n}^\nu) e_{i\nu} = 0 . \quad (\text{VI.9})$$

Da $\hat{\mathbf{n}}$ normiert ist, gilt außerdem

$$(\partial_\mu \hat{n}^\nu) \hat{n}_\nu = 0 , \quad (\text{VI.10})$$

also insgesamt

$$\hat{p}^\mu (\partial_\mu \hat{n}^\nu) = 0 . \quad (\text{VI.11})$$

D.h. der Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ der repräsentativen Distribution $\bar{\Delta}$ wird entlang der Integrallinien von $\hat{\mathbf{p}}$, den sogenannten charakteristischen Linien, bezüglich der Konnexion $\overset{\circ}{\omega}$ parallel verschoben.

VI.2 Konstruktion des charakteristischen Bündels

VI.2.1 Trivialisierbarkeit und Torsion

Wir wollen uns nun wieder dem Problem, der Bestimmung der Riemannschen-, bzw. Riemann-Cartanschen Struktur, zuwenden. Nach Kapitel 2 läßt sich die Metrik des Raumes folgendermaßen aus \mathbf{B} und $\hat{\mathbf{p}}$ aufbauen: ²

$$G_{\mu\nu} = \epsilon^2 B_{i\mu} B^i{}_\nu + g_{00} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \quad (\text{VI.12})$$

²Um die Metrik dimensionslos zu halten, führen wir einen Längenparameter ϵ auf der rechten Seite der Gleichung ein

Aus der kovarianten Ableitung von \mathbf{G} erhalten wir mit Hilfe der Definition der allgemein kovarianten Ableitung

$$\nabla_\lambda G_{\mu\nu} = \epsilon^2 (\mathcal{D}_\lambda B_{i\mu}) B^i{}_\nu + \epsilon^2 (\mathcal{D}_\lambda B^i{}_\nu) B_{i\mu} + (\nabla_\lambda \hat{p}_\mu) \hat{p}_\nu + \hat{p}_\mu (\nabla_\lambda \hat{p}_\nu) . \quad (\text{VI.13})$$

Die Bedingung der kovarianten Konstanz von \mathbf{G} ist nun erfüllt wenn gilt

$$\mathcal{D}_\lambda B_{i\mu} = 0 \quad (\text{VI.14})$$

bzw. ausgeschrieben

$$D_\lambda B_{i\mu} = \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} B_{i\sigma} \quad (\text{VI.15})$$

sowie

$$\nabla_\lambda \hat{p}_\mu = 0 . \quad (\text{VI.16})$$

Es existieren nun entscheidende Einschränkungen für die bis jetzt nicht näher festgelegte $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ wertige Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ ³

Die erste Einschränkung für $\mathbf{\Gamma}$ rührt von der Tatsache her, daß wir aufgrund der Gleichungen (VI.4.a) und (VI.4.b) von trivialisierbaren Eichfeldern ausgehen.

Definiert man nun die Torsion \mathbf{Z} wie üblich ⁴

$$Z^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}) \equiv \Gamma^\lambda{}_{[\mu\nu]} , \quad (\text{VI.17})$$

so gilt für einen beliebigen Gradientenvektor \mathbf{C}

$$C_\mu = \partial_\mu C \quad (\text{VI.18})$$

folgende Identität [15]

$$\nabla_{[\mu} C_{\nu]} = Z^\lambda{}_{\mu\nu} C_\lambda . \quad (\text{VI.19})$$

³In diesem Kapitel ist $\mathbf{\Gamma}$ die Riemann-Cartan Verallgemeinerung der Riemannschen Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ aus Kapitel 2

⁴Die Indexklammer $[\dots]$ bedeutet die totale Antisymmetrisierung der eingeschlossenen Indizes.

Benutzt man nun Gleichung (VI.15) für die zweite Trivialisierbarkeitsbedingung (VI.4.b), so erhält man folgende einschränkende Bedingungsgleichung für die Torsion \mathbf{Z} von $\mathbf{\Gamma}$:

$$Z^\lambda_{\mu\nu} B_{i\lambda} = 0 . \quad (\text{VI.20})$$

Da der charakteristische Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ definitionsgemäß durch die extrinsische Krümmung annulliert wird, vgl. (VI.8), erhält man für den Torsionstensor \mathbf{Z} folgenden Ausdruck

$$Z^\lambda_{\mu\nu} = g_{00} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\sigma Z^\sigma_{\mu\nu} . \quad (\text{VI.21})$$

Diese spezielle Form der Torsion, läßt sich nun nicht aus Gleichung (VI.15) herleiten, vielmehr wird durch diese Gleichung nur der sogenannte *wesentlichen Teil* γ von $\mathbf{\Gamma}$ festgelegt:

$$\gamma^\lambda_{\mu\nu} = \hat{P}^\lambda_{\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \quad (\text{VI.22})$$

wobei wir den Projektor $\hat{\mathbf{P}}$ auf die charakteristische 3-Ebene wie folgt definiert haben:

$$\hat{P}^\lambda_{\sigma} = g^\lambda_{\sigma} - g_{00} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\sigma \quad (\text{VI.23.a})$$

$$\hat{p}^\lambda \hat{p}_\lambda = g_{\mu\nu} \hat{p}^\mu \hat{p}^\nu = g_{00} . \quad (\text{VI.23.b})$$

Somit können wir nun die zweite Trivialisierbarkeitsbedingung (VI.4.b) mit Hilfe des wesentlichen Teils γ ausdrücken

$$D_\mu B_{i\nu} = \gamma^\lambda_{\nu\mu} B_{i\lambda} , \quad (\text{VI.24})$$

wobei γ nun symmetrisch sein muß

$$\gamma^\lambda_{\mu\nu} = \gamma^\lambda_{\nu\mu} . \quad (\text{VI.25})$$

Die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ wird also nicht vollständig durch das Eichpotential \mathbf{A} und deren assoziierten Krümmungsfeld \mathbf{B} ⁵ ($\equiv \mathbf{B}_i$, $i = 1, 2, 3$) festgelegt. Der verbleibende

⁵Gleichbedeutend hierzu verwenden wir den Begriff „extrinsische Krümmung“

Freiheitsgrad ist die Komponente parallel zu $\hat{\mathbf{p}}$, wobei sich die Torsion \mathbf{Z} (VI.21) gerade als schiefssymmetrischer Teil eben dieses Freiheitsgrades erweist. Dies ermöglicht es uns die unbestimmte Komponente von $\mathbf{\Gamma}$ so festzulegen, daß eine konsistente Riemann-Cartan-Struktur entsteht; wie im folgenden gezeigt wird. Die so vollständig bestimmte *Standard-Konnexion* $\mathbf{\Gamma}$ besitzt eine nichtverschwindende Torsion \mathbf{Z} , so daß wir im allgemeinen keine streng Riemannsche Raum-Zeit Struktur zugrunde legen können.

VI.2.2 Die Bündel-Konnexion

In diesem Abschnitt wollen wir die geometrische Bedeutung der $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ mit Hilfe des charakteristischen Vektorfeldes $\hat{\mathbf{p}}$ untersuchen. Dazu verlassen wir das charakteristische Bündel $\bar{\tau}_4$ und untersuchen die Trivialisierbarkeitsbedingungen (VI.4.a) und (VI.4.b) mit Hilfe der aus dem repräsentative Bündel stammenden Größen. Die kovarianten Ableitungen der $\bar{\tau}_4$ Bündelschnitte e^ν_i können mit Hilfe der extrinsischen Krümmung aus $\bar{\tau}_4$ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$D_\mu e^\nu_i = -B_{i\mu} \hat{n}^\nu . \quad (\text{VI.26})$$

Betrachten wir uns nun die zweite Bedingung (VI.4.b). Da der Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ eine eichinvariante Größe ist erhält man aus (VI.7.b) mit Hilfe von (VI.26)

$$D_\mu B_{i\nu} = g_{00} g_{\lambda\sigma} e^\lambda_i \partial_\mu \partial_\nu \hat{n}^\sigma , \quad (\text{VI.27})$$

woraus man unmittelbar die Identität (VI.4.b) erkennt.

Wir können nun eine wichtige Schlußfolgerung aus Gleichung (VI.27) ziehen. Kombiniert man sie nämlich mit (VI.24), so ergibt die Kontraktion mit $\hat{\mathbf{p}}$ eine Beziehung zwischen der Normalen $\hat{\mathbf{n}}$ von $\bar{\Delta}$ und dem wesentlichen Teil γ von $\mathbf{\Gamma}$:

$$\hat{p}^\nu \partial_\nu \partial_\mu \hat{n}^\lambda = \gamma^\sigma_{\mu\nu} \hat{p}^\nu \partial_\sigma \hat{n}^\lambda . \quad (\text{VI.28})$$

Andererseits impliziert die Definition des charakteristische Vektorfeldes

$$\hat{P}^\mu{}_\nu \partial_\mu \hat{n}^\lambda = \partial_\nu \hat{n}^\lambda . \quad (\text{VI.29})$$

Differenziert man diese Gleichung und kontrahiert sie mit $\hat{\mathbf{p}}$, so ergibt sich ein der Gleichung (VI.28) ähnlicher Ausdruck:

$$\hat{p}^\nu \partial_\nu \partial_\mu \hat{n}^\lambda = \left(\partial_\mu \hat{P}^\sigma{}_\nu \right) \hat{p}^\nu \left(\partial_\sigma \hat{n}^\lambda \right) . \quad (\text{VI.30})$$

Ein Vergleich mit (VI.28) ergibt als Resultat

$$\partial_\lambda \hat{p}^\sigma + \gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \hat{p}^\nu = 0. \quad (\text{VI.31})$$

Dies ist ein interessantes Ergebnis: Denn könnte der wesentliche Teil $\boldsymbol{\gamma}$ durch die Konnexion $\boldsymbol{\Gamma}$ ersetzt werden, so wäre der Einheitsvektor kovariant konstant bezüglich der $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ Konnexion $\boldsymbol{\Gamma}$, welche durch Gleichung (VI.15) unabhängig vom charakteristischen Vektorfeld eingeführt wurde. Daß dies in der Tat möglich ist, läßt sich folgendermaßen zeigen. Wir spalten die Konnexion $\boldsymbol{\Gamma}$ in ihren wesentlichen Teil $\boldsymbol{\gamma}$ und einen „Rest“ \mathbf{z} auf

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \hat{p}^\lambda z_{\mu\nu}. \quad (\text{VI.32})$$

Letzterer gehorche der Bedingung

$$z_{\mu\nu} \hat{p}^\mu = 0. \quad (\text{VI.33})$$

Der charakteristische Vektor ist nun in der Tat kovariant konstant

$$\nabla_\lambda \hat{p}^\sigma = \partial_\lambda \hat{p}^\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \hat{p}^\nu = 0 , \quad (\text{VI.34})$$

während die Torsion \mathbf{Z} folgender Gleichung genügt

$$Z^\lambda{}_{\mu\nu} = \hat{p}^\lambda z_{[\mu\nu]}. \quad (\text{VI.35})$$

Die kovariante Konstanz von $\hat{\mathbf{p}}$ ist außerdem konsistent mit der Normalisierungsbedingung (VI.23.b) und der Orthogonalitätsbedingung (VI.8) aufgrund folgender Identität

$$D_\mu (B_{i\lambda} \hat{p}^\lambda) \equiv (\mathcal{D}_\mu B_{i\lambda}) \hat{p}^\lambda + B_{i\lambda} (\nabla_\mu \hat{p}^\lambda) . \quad (\text{VI.36})$$

Die geometrische Bedeutung der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ wird nun deutlich. $\mathbf{\Gamma}$ ist die (lokale) Konnexionsform im charakteristischen Bündel $\overset{\circ}{\tau}_4$. Diese Konnexion läßt sich ferner aus „extrinsischer“ Sicht mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems im einbettenden Raum beschreiben. Betrachtet man zum Beispiel einen Schnitt $V_\mu(\mathbf{x})$ aus dem Bündel $\overset{\circ}{\tau}_4$, so gilt

$$\hat{p}^\mu V_\mu = 0 , \quad (\text{VI.37})$$

Die Bedingung der kovarianten Konstanz von $\hat{\mathbf{p}}$, Gleichung (VI.34), garantiert daß die Ableitung von \mathbf{V} ebenfalls ein Objekt aus $\overset{\circ}{\tau}_4$ ist:

$$\hat{p}^\mu \nabla_\lambda V_\mu = 0 . \quad (\text{VI.38})$$

Im allgemeinen ist die so gefundene Standard-Konnexion nicht identisch der Konnexion, die man durch Reduktion der kanonischen Konnexion $\overset{\circ}{\omega}$ auf eine im \mathbf{E}_4 oder \mathbf{M}_4 eingebettete Distribution, erhält. Man erkennt dies leicht an folgendem Beispiel: Die t'Hooft-Polyakov Monopol Lösung [12] für ein gekoppeltes $\text{SO}(3)$ Yang-Mills-Higgs System enthält ein trivialisierbares Eichfeld, welches gleichzeitig statisch in dem Sinne ist, daß die charakteristischen Linien bezüglich $\overset{\circ}{\omega}$ gerade Linien sind. Das heißt, die charakteristischen Flächen sind flache 3-er Hyperebenen (z.b. orthogonal zur x^0 Achse). Die Oberflächenreduktion von $\overset{\circ}{\omega}$ auf diese Hyperebenen ergibt eine Konnexion mit verschwindender Krümmung im Widerspruch zur nichttrivialen t'Hooft-Polyakov Lösung für das Eichfeld, dessen Feldstärketensor ungleich Null ist. Andererseits gibt es Konfigurationen, bei denen sowohl $\mathbf{\Gamma}$ als auch \mathbf{A} übereinstimmen, und aus diesem Grunde $\text{SO}(3)$ Reduktionen von $\overset{\circ}{\omega}$ sind. Ein Beispiel ist die Euklidische Ein-Meron Lösung [11], bei welcher die Distributionen $\overline{\Delta}$ und $\overset{\circ}{\Delta}$ in

eine sphärische Distribution übergehen, d.h. die Integralflächen sind in beiden Fällen konzentrische 3-Sphären um den Ort des Merons.

VI.2.3 Die Bündelkrümmung

Nachdem nun die Bedeutung von $\mathbf{\Gamma}$ als eine Bündelkonnexion in $\hat{\tau}_4$ erkannt wurde, besteht der nächste Schritt in der Auffindung der korrespondierenden Bündelkrümmung \mathbf{R} , die wie üblich [15] definiert ist:

$$R^\sigma{}_{\nu\mu\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\kappa\mu} \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda} \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} . \quad (\text{VI.39})$$

Obwohl wir die genaue Gestalt der Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ bis jetzt noch nicht kennen, ist es doch möglich einige Aussagen über die ihre Krümmung \mathbf{R} zu machen.

Dazu kombinieren wir die Identität

$$\nabla_{[\lambda} \nabla_{\mu]} \hat{p}^\sigma = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} \hat{p}^\nu + Z^\nu{}_{\lambda\mu} \nabla_\nu \hat{p}^\sigma \quad (\text{VI.40})$$

mit der Bedingung der kovarianten Konstanz von $\hat{\mathbf{p}}$ (VI.34), und erhalten

$$R^\sigma{}_{\nu\lambda\mu} \hat{p}^\nu = 0 . \quad (\text{VI.41})$$

Diese Bedingung ist also automatisch erfüllt. Damit \mathbf{R} , in Übereinstimmung mit seiner Bedeutung als Bündelkrümmung in $\hat{\tau}_4$, vollständig innerhalb der charakteristischen Distribution $\hat{\Delta}$ wirkt, müssen wir zusätzlich fordern, daß \mathbf{R} durch den charakteristischen Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ bezüglich des gesamten ersten Indexpaares annihilert wird. Das heißt, es muß zusätzlich gelten:

$$\hat{p}_\sigma R^\sigma{}_{\nu\mu\lambda} = 0 . \quad (\text{VI.42})$$

Diese Bedingung wird nun im allgemeinen nicht erfüllt sein. Sie repräsentiert vielmehr eine weitere Einschränkung für die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$. Das ist nicht weiter schlimm, da wir in $\mathbf{\Gamma}$ ja einen bis jetzt unbestimmten Teil \mathbf{z} haben, welchen wir dazu verwenden wollen, Gleichung (VI.42) zu erfüllen.

Betrachten wir uns dazu die Aufspaltung von $\mathbf{\Gamma}$ in den wesentlichen Teil $\boldsymbol{\gamma}$ und den Rest \mathbf{z} , wobei letzterer der Bedingung (VI.33) unterworfen ist, so läßt sich (VI.42) in eine Gleichung für \mathbf{z} umschreiben. Setzt man dazu Gleichung (VI.32) in den definierenden Ausdruck (VI.39) für \mathbf{R} ein, so ergibt sich eine komplizierte Differentialgleichung für \mathbf{z}

$$\partial_\mu z_{\nu\lambda} - \partial_\lambda z_{\nu\mu} = g_{00} \gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} (\partial_\mu \hat{p}_\sigma - g_{00} z_{\sigma\mu}) - g_{00} \gamma^\sigma{}_{\nu\mu} (\partial_\lambda \hat{p}_\sigma - g_{00} z_{\sigma\lambda}) \quad (\text{VI.43})$$

Es läßt sich jedoch eine einfache Lösung angeben, welche (VI.33) gehorcht:

$$z_{\sigma\mu} = g_{00} \partial_\mu \hat{p}_\sigma . \quad (\text{VI.44})$$

Diese Gleichung kann man auch mit Hilfe von (VI.31) umschreiben

$$z_{\sigma\mu} = -g_{00} \gamma_{\sigma\nu\mu} \hat{p}^\nu . \quad (\text{VI.45})$$

Somit ergibt sich für die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g_{00} \hat{p}^\lambda \hat{p}^\sigma \gamma_{\mu\sigma\nu} , \quad (\text{VI.46})$$

und für die dazugehörige Torsion (VI.35)

$$Z^\lambda{}_{\mu\nu} = -g_{00} \hat{p}^\lambda \partial_{[\mu} \hat{p}_{\nu]} . \quad (\text{VI.47})$$

Die Lösung des Problems (VI.42) in der Gestalt der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ (VI.46) ist immer möglich. Da $\mathbf{\Gamma}$ auf einer speziellen Lösung der Differentialgleichung für \mathbf{z} (VI.43) basiert, ist es denkbar, daß weitere Konnexionen existieren, deren Torsion \mathbf{Z} verschwindet. Zu diesem Punkt werden wir später zurückkehren.

Der charakteristische Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ ist nun in der Tat unter der oben gefundenen Standard-Konnexion kovariant konstant; d.h. es gilt nicht nur (VI.34) sondern zusätzlich auch noch

$$\nabla_\lambda \hat{p}_\sigma \equiv \partial_\lambda \hat{p}_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\sigma\lambda} \hat{p}_\rho = 0 , \quad (\text{VI.48})$$

wobei wir die Indizes momentan noch mit der Minkowskischen bzw. Euklidischen Metrik $g_{\mu\nu}$ bewegt haben. Es gilt also

$$\hat{p}_\sigma = g_{\sigma\lambda}\hat{p}^\lambda, \quad \gamma_{\mu\sigma\nu} = g_{\mu\lambda}\gamma^\lambda_{\sigma\nu} \text{ usw.} \quad (\text{VI.49})$$

Die Metrik \mathbf{g} ist natürlich nicht kovariant konstant bezüglich $\mathbf{\Gamma}$, jedoch gelten auf jeden Fall die zwei Gleichungen (VI.34) und (VI.48). Aus diesem Grund kann man nun vermuten, daß eine Metrik \mathbf{G} existiert, welche bezüglich $\mathbf{\Gamma}$ kovariant konstant ist, und die wie \mathbf{g} agiert, wenn man sie auf Vektoren anwendet, welche in die charakteristische Richtung zeigen. Das heißt

$$G_{\mu\nu}\hat{p}^\mu\hat{p}^\nu = g_{\mu\nu}\hat{p}^\mu\hat{p}^\nu = g_{00} . \quad (\text{VI.50})$$

Der Beweis dieser Annahme ist Gegenstand des folgenden Abschnittes.

VI.2.4 Die Fasermetrik

Um die geometrischen Größen des charakteristischen Bündels zu vervollständigen benötigen wir eine Fasermetrik für $\overset{\cap}{\tau}_4$. Die Fasermetrik für das repräsentative Bündel $\bar{\tau}_4$ ist die 3-dimensionale Metrik \mathbf{g} , welche bezüglich der trivialisierbaren Konnexion \mathbf{A} kovariant konstant ist:

$$D_\lambda g_{ij} = 0 . \quad (\text{VI.51})$$

Ferner versuchen wir eine neue Fasermetrik \mathbf{G} für das Tangentenbündel $\overset{\circ}{\tau}_4$ zum Basisraum \mathbf{E}_4 bzw \mathbf{M}_4 zu finden, welche einerseits

$$\nabla_\lambda G_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{VI.52})$$

gehört, und andererseits der Bedingung (VI.50) genügt. Die Einschränkung $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ von \mathbf{G} auf $\overset{\cap}{\Delta}$ kann man dann als Fasermetrik für das charakteristische Bündel $\overset{\cap}{\tau}_4$ verwenden:

$$\overset{\cap}{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - g_{00}\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu \quad (\text{VI.53})$$

Die Gleichungen (VI.48) und (VI.52) garantieren die kovariante Konstanz von $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$:

$$\nabla_{\lambda} \overset{\circ}{G}_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{VI.54})$$

Es läßt sich nun leicht ein Ausdruck für $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$ finden:

$$\overset{\circ}{G}_{\mu\nu} = \varrho^2 B_{i\mu} B^i{}_{\nu} \equiv \varrho^2 B_{\mu\nu} . \quad (\text{VI.55})$$

Die kovariante Konstanz (VI.54) ist sofort gezeigt, wenn man berücksichtigt, daß gilt:

$$\nabla_{\lambda} B_{\mu\nu} = 0 ; \quad (\text{VI.56})$$

was wir mit Hilfe der Identität

$$\nabla_{\lambda} B_{\mu\nu} = (\mathcal{D}_{\lambda} B_{i\mu}) B^i{}_{\nu} + B_{i\mu} (\mathcal{D}_{\lambda} B^i{}_{\nu}) , \quad (\text{VI.57})$$

sowie der Bedingung (VI.14) für die allgemein kovariante Konstanz der extrinsischen Krümmung \mathbf{B} leicht zeigen können. Wir haben nun außer der Metrik \mathbf{g} noch eine zweite Metrik \mathbf{G} im Tangentenbündel $\overset{\circ}{\tau}_4$, und müssen aus diesem Grunde eine gewisse Vorsicht walten lassen, wenn wir Indizes bewegen. Folgende Konvention gelte: Indizes, die mit \mathbf{G} bewegt werden, kennzeichnen wir mit einem Punkt. Die folgenden Beispiele mögen dies verdeutlichen.

$$\hat{p}_{\dot{\mu}} = G_{\mu\nu} \hat{p}^{\nu} = \hat{p}_{\mu} \quad (\text{VI.58.a})$$

$$G^{\mu\nu} = \varrho^2 B^{\mu\nu} + g_{00} \hat{p}^{\mu} \hat{p}^{\nu} \quad (\text{VI.58.b})$$

$$G^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \varrho^{-2} (B^{-1})^{\mu\nu} + g_{00} \hat{p}^{\mu} \hat{p}^{\nu} \quad (\text{VI.58.c})$$

$$(B^{-1})^{\mu\nu} B_{\nu\lambda} = \hat{P}^{\mu}{}_{\lambda} \quad (\text{VI.58.d})$$

$$G^{\dot{\mu}\dot{\nu}}G_{\nu\lambda} = g^\mu{}_\lambda . \quad (\text{VI.58.e})$$

Die Objekte $G^{\mu\nu}$, $B^{\mu\nu}$, $\hat{P}_{\mu\nu}$ und $\hat{P}^{\mu\nu}$ sind im allgemeinen nicht konstant, es gilt vielmehr

$$\nabla_\lambda G^{\dot{\mu}\dot{\nu}} = 0 \quad (\text{VI.59.a})$$

$$\nabla_\lambda (B^{-1})^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{VI.59.b})$$

$$\nabla_\lambda \hat{P}^\mu{}_\nu = 0 . \quad (\text{VI.59.c})$$

Wir wollen nun die aus der Existenz der Metrik \mathbf{G} folgenden Eigenschaften der Krümmung \mathbf{R} untersuchen. Betrachten wir dazu die allgemeingültige Identität

$$(\nabla_\lambda \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\lambda) G_{\mu\nu} \equiv -R^\rho{}_{\mu\lambda\sigma} G_{\rho\nu} - R^\rho{}_{\nu\lambda\sigma} G_{\mu\rho} + 2Z^\rho{}_{\lambda\sigma} \nabla_\rho G_{\mu\nu} , \quad (\text{VI.60})$$

und berücksichtigen die kovariante Konstanz von \mathbf{G} (VI.13), so erhalten wir die Schief-Symmetrie des Krümmungsoperators \mathbf{R}

$$R_{\dot{\nu}\mu\lambda\sigma} = -R_{\dot{\mu}\nu\lambda\sigma} . \quad (\text{VI.61})$$

Wir sehen nun, daß die Geometrie des charakteristischen Bündels eine *Riemann-Cartan* Struktur besitzt. Die Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ läßt sich nun in diesem Riemann-Cartan Raum in einen Riemannschen Teil $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ und in die sog. Kontorsion \mathbf{K} zerlegen [13]

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} + K^\lambda{}_{\mu\nu} \quad (\text{VI.62})$$

Der Riemannsche Teil $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ ist hierbei durch die Christoffel Symbole gegeben

$$\tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{\lambda\dot{\sigma}} (\partial_\mu G_{\sigma\nu} + \partial_\nu G_{\sigma\mu} - \partial_\sigma G_{\mu\nu}) . \quad (\text{VI.63})$$

wogegen sich die Kontorsion \mathbf{K} folgendermaßen aus der Torsion \mathbf{Z} zusammensetzt:

$$K^\lambda{}_{\mu\nu} = Z^\lambda{}_{\mu\nu} + Z_{\dot{\mu}\nu}{}^{\dot{\lambda}} + Z_{\dot{\nu}\mu}{}^{\dot{\lambda}} . \quad (\text{VI.64})$$

VI.3 Der Bündelisomorphismus

Die Beziehung der beiden Bündel $\bar{\tau}_4$ und $\overset{\cap}{\tau}_4$ zueinander ist enger als es die vorausgehenden Betrachtungen zunächst erscheinen lassen. Es wird sich in der Tat zeigen, daß die beiden Bündel isomorph sind, und damit als identisch betrachtet werden können.

Wir wollen in diesem Kapitel den Bündelisomorphismus untersuchen. Die Ergebnisse benutzen wir dann um die Krümmung \mathbf{R} aus $\overset{\cap}{\tau}_4$ mit Hilfe der extrinsischen Krümmung \mathbf{B} aus $\bar{\tau}_4$ auszudrücken. Dies wird uns zu einer Verallgemeinerung der Dimeronkonfiguration führen. Dabei zeigt sich, daß die meisten Eigenschaften des Dimeron Falles diese Verallgemeinerungsprozedur unverändert überstehen. So verträgt sich zum Beispiel die Riemann-Cartan Struktur formal mit den Bedingungen für die Existenz eines konformal flachen, lokal symmetrischen Einstein Raumes. Wir können daraus folgern, daß die charakteristischen Flächen eine konstante Krümmung besitzen.

VI.3.1 Die Bündelabbildung

Die beiden Bündel $\bar{\tau}_4$ und $\overset{\cap}{\tau}_4$ werden miteinander durch eine Abbildung verknüpft, die durch die extrinsische Krümmung \mathbf{B} von $\bar{\tau}_4$ induziert wird. Betrachten wir zunächst die Bündelabbildung $[\overset{\cap}{B}]$:

$$[\overset{\cap}{B}] : \bar{\tau}_4 \rightarrow \overset{\cap}{\tau}_4 . \quad (\text{VI.65})$$

Durch diese Abbildung wird ein Schnitt $\mathbf{v} \in \bar{\tau}_4$ in sein Bild $\mathbf{V} \in \overset{\cap}{\tau}_4$ übergeführt, so daß gilt

$$V_\mu = \epsilon B_{i\mu} v^i , \quad (\text{VI.66})$$

wobei der Parameter ϵ aus Dimensionsgründen eingeführt wurde. Diese Bündelabbildung kann man natürlich auf alle Tensorprodukte erweitern. So läßt sich z.B. die Fasermetric

$\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ (VI.55) aus $\overset{\cap}{\tau}_4$ als das Bild der Fasermetric \mathbf{g} (VI.51) darstellen:

$$\overset{\cap}{G}_{\mu\nu} = \epsilon^2 B_{i\mu} B_{j\nu} g^{ij} . \quad (\text{VI.67})$$

Aus diesem Grund ist das Skalarprodukt zweier Schnitte $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \bar{\tau}_4$ und ihrer Bilder $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in \overset{\cap}{\tau}_4$ invariant bezüglich $[\overset{\cap}{B}]$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (\text{VI.68})$$

bzw. in Komponenten

$$G^{\mu\nu} U_\mu V_\nu = g_{ij} u^i v^j . \quad (\text{VI.69})$$

Die inverse Abbildung $[\bar{B}]$ bildet jeden Schnitt $\mathbf{V} \in \overset{\cap}{\tau}_4$ nach $\bar{\tau}_4$ ab:

$$v_i = \epsilon B_{i\mu} V^\mu . \quad (\text{VI.70})$$

Kombiniert man beide Abbildungen, so zeigt sich daß (VI.70) und (VI.66) die Identitätsabbildung für die korrespondierenden Bildräume ergeben:

$$[\bar{B}] \circ [\overset{\cap}{B}] = \text{id}_{\bar{\tau}_4} \quad (\text{VI.71.a})$$

$$[\overset{\cap}{B}] \circ [\bar{B}] = \text{id}_{\overset{\cap}{\tau}_4} . \quad (\text{VI.71.b})$$

Somit haben wir die 1-1 Beziehung der beiden Bündel gezeigt!

VI.3.2 Extrinsische und intrinsische Krümmung

Für einen affinen Bündelisomorphismus [15] genügt es nicht, daß die Fasern über jedem Punkt \mathbf{x} im Basisraum in 1-1 Beziehung stehen. Zusätzlich muß die Aufspaltung in einen horizontalen und einen vertikalen Unterraum mit der Bündelabbildung konsistent sein. Mit anderen Worten, der Prozeß der Parallelverschiebung muß mit der Bündelabbildung vertauschen. Dies ist in der Tat der Fall, falls die kovarianten Ableitungen mit der Bündelabbildung kommutieren, das heißt es muß gelten:

$$\nabla \circ [\overset{\cap}{B}] = [\overset{\cap}{B}] \circ \mathbf{D} \quad (\text{VI.72.a})$$

$$\mathbf{D} \circ [\bar{B}] = [\bar{B}] \circ \nabla . \quad (\text{VI.72.b})$$

In Komponenten ausgedrückt lauten diese Bedingungen

$$\nabla_\lambda V_\mu = \epsilon B_{i\mu} (D_\lambda v^i) \quad (\text{VI.73.a})$$

$$D_\lambda v_i = \epsilon B_{i\mu} \nabla_\lambda V^\mu \quad (\text{VI.73.b})$$

Differenziert man die korrespondierenden Gleichungen (VI.66) und (VI.70), so erhalten wir

$$\nabla_\lambda V_\mu \equiv \epsilon (\mathcal{D}_\lambda B_{i\mu}) v^i + \epsilon B_{i\mu} (D_\lambda v^i) \quad (\text{VI.74.a})$$

$$D_\lambda v_i \equiv \epsilon (\mathcal{D}_\lambda B_{i\mu}) V^\mu + \epsilon B_{i\mu} (\nabla_\lambda V^\mu) . \quad (\text{VI.74.b})$$

Benutzen wir weiter die Konstanzbedingung (VI.14) für die extrinsische Krümmung **B** so zeigt sich, daß (VI.73.b) und (VI.73.a) erfüllt sind.

Aufgrund dieser Tatsache zeigt sich, daß die extrinsischen Krümmungskoeffizienten sowohl in $\bar{\tau}_4$ als auch in $\overset{\cap}{\tau}_4$ wirken. Diese Größen können deshalb auch nur durch gleichzeitige Anwendung der trivialisierbaren Konnexion **A** und der Standard-Konnexion parallel verschoben werden. Die allgemein kovariante Ableitung **D** (VI.14) berücksichtigt dies und läßt sich deshalb auf alle gemischten Objekte mit beliebigem Rang anwenden. Die oben aufgeführten Transportgesetze mit **∇** und **D** sind also nur spezielle Fälle des allgemeineren Transportes durch **D**.

Mit Hilfe dieses Bündelisomorphismus wollen wir nun die Beziehung der beiden Bündelkrümmungen untersuchen. Da sich die intrinsische Krümmung **F** in $\bar{\tau}_4$ mit Hilfe der ersten Trivialisierungsbedingung (VI.4.a) vollständig durch die extrinsischen Krümmungsfelder **B** ausdrücken läßt, können wir die Krümmung **R** in $\overset{\cap}{\tau}_4$ ebenfalls vollständig mit Hilfe von **B** formulieren. Um zu einer Beziehung zwischen **R** und **B** zu gelangen, differenzieren wir die Gleichungen (VI.72.a) einmal. Wir erhalten symbolisch:

$$\nabla \circ \nabla \circ [\overset{\cap}{B}] = [\overset{\cap}{B}] \circ \mathcal{D} \circ \mathbf{D} \quad (\text{VI.75.a})$$

$$\mathcal{D} \circ \mathbf{D} \circ [\bar{B}] = [\bar{B}] \circ \nabla \circ \nabla . \quad (\text{VI.75.b})$$

In Komponenten ausgedrückt, ergibt sich nach Schief-Symmetrisierung

$$\nabla_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}V_{\mu} = \epsilon B_{i\mu}\mathcal{D}_{[\sigma}D_{\lambda]}v^i \quad (\text{VI.76.a})$$

$$\mathcal{D}_{[\sigma}D_{\lambda]}v_i = \epsilon B_{i\mu}\nabla_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}V^{\mu} . \quad (\text{VI.76.b})$$

Berücksichtigen wir noch die Identitäten

$$\mathcal{D}_{[\sigma}D_{\lambda]}v^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ij}{}_k F_{j\sigma\lambda}v^k + Z^{\rho}{}_{\sigma\lambda}(D_{\rho}v^i) \quad (\text{VI.77.a})$$

$$\nabla_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}V_{\mu} \equiv -\frac{1}{2}R^{\rho}{}_{\mu\sigma\lambda}V_{\rho} + Z^{\rho}{}_{\sigma\lambda}(\nabla_{\rho}V_{\mu}) , \quad (\text{VI.77.b})$$

sowie die Bündelabbildungen (VI.66) und (VI.70), so erhalten wir die Beziehung

$$R^{\rho}{}_{\mu\sigma\lambda} = -\left(\hat{P}^{\rho}{}_{\sigma}B_{\mu\lambda} - \hat{P}^{\rho}{}_{\lambda}B_{\mu\sigma}\right) . \quad (\text{VI.78})$$

Diese spezielle Gestalt der Krümmung \mathbf{R} hat wiederum die Form für die Euklidische Dimeron Konfiguration [8]! Wir können \mathbf{R} als total kovariantes Objekt schreiben, indem wir den ersten Index mit Hilfe der Fasermetric $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ (VI.55) senken:

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = -\epsilon^2(B_{\mu\sigma}B_{\nu\lambda} - B_{\mu\lambda}B_{\nu\sigma}) . \quad (\text{VI.79})$$

In dieser Gestalt ist die Krümmung \mathbf{R} aus $\overset{\cap}{\tau}_4$ vollständig mit Hilfe der extrinsischen Krümmung \mathbf{B} aus $\bar{\tau}_4$ ausgedrückt. Stehen die ersten beiden Indizes oben, so läßt sich \mathbf{R} durch den Euklidischen Projektor $\hat{\mathbf{P}}$ allein ausdrücken:

$$R^{\mu\nu}{}_{\sigma\lambda} = -\epsilon^{-2}\left(\hat{P}^{\mu}{}_{\sigma}\hat{P}^{\nu}{}_{\lambda} - \hat{P}^{\mu}{}_{\lambda}\hat{P}^{\nu}{}_{\sigma}\right) . \quad (\text{VI.80})$$

\mathbf{R} genügt den beiden Bedingungen (VI.41), (VI.42), und läßt außer dem charakteristischen Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ keinen weiteren kovariant konstanten Vektor zu! Insbesondere gibt es keinen $\overset{\cap}{\tau}_4$ Schnitt U dessen kovariante Ableitung wie folgt lautet:

$$\nabla_{\lambda}U_{\mu} = N_{\mu}\hat{p}_{\lambda} . \quad (\text{VI.81})$$

Um diese Annahme zu beweisen, benutzen wir die Identitäten (VI.77.a) und das Ergebnis (VI.78) für \mathbf{R} und erhalten

$$\nabla_{[\sigma}\nabla_{\lambda]}U_{\mu} = \hat{p}_{[\lambda}\nabla_{\sigma]}N_{\mu} = B_{\mu[\lambda}U_{\sigma]} \quad (\text{VI.82})$$

Da der letzte Term $\hat{\mathbf{p}}$ nicht enthält, muß er identisch Null sein, was nur möglich ist für verschwindendes \mathbf{U} . Das heißt die Gleichung (VI.81) besitzt keine nicht-triviale Lösung für \mathbf{U} und demzufolge gibt es außer $\hat{\mathbf{p}}$ keinen kovariant konstanten Schnitt. Die Konsequenz davon ist, daß die kovariante Ableitung eines beliebigen Schnittes aus τ_4 in Wirklichkeit folgende Gestalt haben muß:

$$\nabla_\lambda U_\mu = N_\mu \hat{p}_\lambda + M_{\mu\lambda} . \quad (\text{VI.83})$$

Aufgrund von (VI.38) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen:

$$\hat{p}^\mu N_\mu = \hat{p}^\mu M_{\mu\lambda} = \hat{p}^\lambda M_{\mu\lambda} = 0 . \quad (\text{VI.84})$$

Der Tensor \mathbf{M} kann nun im Gegensatz zum Vektor \mathbf{N} niemals verschwinden. Um dafür ein Beispiel zu geben, lösen wir die Konstanzbedingung (VI.14) nach der koordinaten kovarianten Ableitung $\nabla \mathbf{B}$ auf, und erhalten mit Hilfe von (VI.83)

$$\nabla_\lambda B_{i\mu} = N_{i\mu} \hat{p}_\lambda + M_{i\mu\lambda} , \quad (\text{VI.85})$$

mit

$$N_{i\mu} = \epsilon_i^{jk} B_{k\mu} (\hat{p}^\sigma A_{j\sigma}) \quad (\text{VI.86.a})$$

$$M_{i\mu\lambda} = g_{00} \epsilon_i^{jk} B_{k\mu} A_{j\sigma} \hat{P}^\sigma{}_\lambda . \quad (\text{VI.86.b})$$

Benützen wir nun diejenige Eichung in der $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ ist (positive Eichung siehe [10]), so reduziert sich (VI.85) zu

$$\nabla_\lambda B_{i\mu} = F_{i\lambda\mu} . \quad (\text{VI.87})$$

Wir sehen, daß der Vektor \mathbf{N} , aber nicht der Tensor \mathbf{M} in (VI.85) weggeeeicht werden kann. Mit einer ähnlichen Argumentation läßt sich zeigen, daß es außer $\hat{\mathbf{G}}$ keinen weiteren kovariant konstanten Tensor zweiten Ranges in τ_4 gibt.

VI.3.3 Verallgemeinerte Konformalität

Die vorausgehenden Untersuchungen des Bündelisomorphismus können dazu benützt werden, um zu untersuchen, wie die konformalen Eigenschaften der Dimeron Konfiguration zu verallgemeinern sind. Dazu erinnern wir uns, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die konformale Flachheit eines Riemannschen Raumes in mindestens vier Dimensionen das Verschwinden des Weylschen Tensors \mathbf{W} ist [16].

$$W^{\nu\dot{\mu}}{}_{\kappa\lambda} = R^{\nu\dot{\mu}}{}_{\kappa\lambda} - \frac{2}{n-2} (\mathcal{R}^{\dot{\nu}}{}_{[\kappa} G^{\dot{\mu}}{}_{\lambda]} - \mathcal{R}^{\dot{\mu}}{}_{[\kappa} G^{\dot{\nu}}{}_{\lambda]}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \mathcal{S} G^{\dot{\nu}}{}_{[\kappa} G^{\dot{\mu}}{}_{\lambda]} . \quad (\text{VI.88})$$

Streng genommen gilt dieses Kriterium nur für einen Riemannschen Raum, doch liegt die Möglichkeit nahe, es formal auf jeden Raum, der eine symmetrische Metrik \mathbf{G} und einen eindeutigen Ricci Tensor $\mathbf{\mathcal{R}}$ besitzt, auszudehnen:

$$\mathcal{R}^{\dot{\mu}}{}_{\nu} = R^{\sigma\dot{\mu}}{}_{\sigma\nu} = R^{\dot{\mu}\sigma}{}_{\nu\sigma} . \quad (\text{VI.89})$$

Einen Raum mit diesen Eigenschaften könnte man dann als einen „fast Riemannschen Raum“ bezeichnen. Wenden wir dieses verallgemeinerte Kriterium auf unsere Situation an, so zeigt sich, daß die Bündelgeometrie unseres trivialisierbaren Eichfeldes in der Tat von einer konformal flachen Riemann-Cartan'schen Struktur herrührt! Denn kontrahieren wir den Krümmungstensor (VI.80) so erhalten wir für $\mathbf{\mathcal{R}}$

$$\mathcal{R}^{\dot{\mu}}{}_{\sigma} = -2c^{-2} \hat{P}^{\mu}{}_{\sigma} \quad (\text{VI.90.a})$$

$$\mathcal{R}_{\mu\sigma} = -2B_{\mu\sigma} . \quad (\text{VI.90.b})$$

Damit ergibt sich der Krümmungsskalar S zu

$$S \equiv \mathcal{R}^{\mu}{}_{\mu} = -6c^{-2} , \quad (\text{VI.91})$$

welcher natürlich aufgrund der Gleichungen (VI.79) und (VI.90.b) kovariant konstant sein muß:

$$\nabla_{\lambda} R_{\dot{\mu}\nu\rho\sigma} = \nabla_{\lambda} \mathcal{R}_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} S = 0 . \quad (\text{VI.92})$$

Drücken wir den Ricci Tensor \mathcal{R} mit Hilfe des Skalars \mathcal{S} aus, ergibt sich weiter

$$\mathcal{R}_{\mu\sigma} = \frac{1}{3} \mathcal{S} \overset{\cap}{G}_{\mu\sigma}, \quad (\text{VI.93})$$

was nichts anderes bedeutet, als das wir im wesentlichen einen Einsteinschen Raum mit drei Dimensionen vorliegen haben. Die Anzahl der Dimensionen ist plausibel, wenn wir uns vergegenwärtigen, daß die Bündel Geometrie auf der 3-dimensionalen Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ basiert.

Wir können nun entweder die gesamte Metrik \mathbf{G} , zusammen mit der Dimension $n = 4$, oder die Fasermetrik $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ mit $n = 3$ Dimensionen im Weylschen Tensor (VI.88) verwenden. In beiden Fällen verschwindet \mathbf{W} , was unsere Definition der verallgemeinerten konformalen Flachheit rechtfertigt. Die folgende Betrachtung verdeutlicht dies:

Es existiert ein Theorem in der Riemannschen Geometrie, welches besagt, daß jeder konformal flache Einstein Raum ein Raum mit konstanter Krümmung ist. Die Verallgemeinerung dieses Theorems auf die vorliegende nicht-Riemannsche Struktur ist in der Tat möglich: Unser dreidimensionaler Einsteinsche Raum (VI.93) besitzt sowohl im intrinsischen ($n = 3$), als auch im extrinsischen ($n = 4$) Fall einen verschwindenden Weylschen Tensor, so daß die verallgemeinerte Konformalität gesichert scheint. Jedoch taucht nun ein Problem auf: das Verschwinden des Weylschen Tensors ist nur in $n \geq 4$ Dimensionen eine hinreichende Bedingung für konformale Flachheit. Unsere Bündelgeometrie ist jedoch dreidimensional. Aus diesem Grund müssen wir eine weitere Bedingung für konformale Flachheit finden. Diese besteht im Verschwinden des Tensors \mathcal{W} [17]:

$$\mathcal{W}_{\mu\nu\lambda} = \nabla_\lambda \mathcal{R}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \mathcal{R}_{\mu\lambda} + \frac{1}{4} (G_{\mu\lambda} \partial_\nu \mathcal{S} - G_{\mu\nu} \partial_\lambda \mathcal{S}) \quad (\text{VI.94})$$

Aufgrund der Konstanz des Krümmungsskalars \mathcal{S} und des Ricci Tensors \mathcal{R} ist dies garantiert. Der Krümmungstensor \mathbf{R} hat nun, wenn man ihn mit Hilfe der

Fasermetrik $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ ausdrückt, in der Tat die Form, die man für einen Raum mit konstanter Krümmung erwartet:

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = -\epsilon^{-2} \left(\overset{\cap}{G}_{\mu\sigma} \overset{\cap}{G}_{\nu\lambda} - \overset{\cap}{G}_{\mu\lambda} \overset{\cap}{G}_{\nu\sigma} \right) . \quad (\text{VI.95})$$

Wir können also unser oben aufgeführtes Kriterium der verallgemeinerten konformalen Flachheit auf unseren nicht-Riemannschen Raum anwenden. Die Konsequenz ist, daß sich die charakteristischen Flächen, falls sie existieren, als dreidimensionale, mit einer Riemannschen Geometrie konstanter Krümmung ausgestattete Untermannigfaltigkeiten des Basisraums herausstellen. Dies läßt sich z.B. anhand der Euklidischen Dimeron Konfiguration verdeutlichen: bei dieser bestehen die charakteristischen Flächen aus 3-Sphären und sind aufgrund ihrer Einbettung in den Basisraum \mathbf{E}_4 mit einer konstanten Krümmungsgeometrie ausgestattet (s. Bild 1). Jedoch ist diese Geometrie, die durch Projektion aus der Geometrie des einbettenden Raumes entsteht, nicht identisch mit der charakteristischen Bündelgeometrie! Trotzdem besitzen beide Geometrien eine konstante Krümmung. Bewegen wir nun eines der Meronzentren ins Unendliche, werden beide Geometrien identisch (vgl. die Diskussion nach Gleichung (VI.38)), da die beiden Distributionen $\overline{\Delta}$ und $\overset{\cap}{\Delta}$ ineinander übergehen.

VI.4 Integrabilität und Torsion

Aufgrund des Bündelisomorphismus können wir die beiden Bündel $\overline{\tau}_4$ und $\overset{\cap}{\tau}_4$ als identisch annehmen. Auf den ersten Blick scheint dies eine paradoxe Situation zu sein: Einerseits besagt ein bekanntes Theorem [18], daß die Konnexion \mathbf{A} in $\overline{\tau}_4$ torsionsfrei sein muß, da dessen Geometrie die Untergeometrie des trivialen einbettenden Bündels $\overset{\circ}{\tau}_4$ darstellt, welches natürlich keine Torsion besitzt; andererseits besitzt die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ in $\overset{\cap}{\tau}_4$ eine nicht verschwindende Torsion, falls wir dessen Bündelgeometrie mit globalen kartesischen Koordinaten ausdrücken (siehe

Abschnitt (VI.2.1)). Aus diesem Grund müssen wir fragen ob die Torsion \mathbf{Z} nicht eliminiert werden kann.

Wir wollen nun untersuchen unter welchen Umständen wir die Torsion auch im kartesischen Koordinatensystem beseitigen können. Es wird sich zeigen, daß die Integrabilität der charakteristischen Distribution ein hinreichendes Kriterium dafür darstellt. Das heißt, solange die Integrabilitätsbedingung gilt, können wir eine streng Riemannsche Konnexion, die sog. *charakteristische Konnexion* $\overset{*}{\Gamma}$, anstelle der Standard-Konnexion, benutzen. Ferner läßt sich die korrespondierende Riemannsche Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ konstruieren, so daß $\overset{*}{\Gamma}$ die Levi-Civita Konnexion von $\overset{*}{\mathbf{G}}$ ist. Die auf diesem Weg gefundene Riemannsche Struktur ist immer im verallgemeinerten Sinn konformal flach und symmetrisch.

VI.4.1 Die Frobenius Bedingung

In einer Riemann-Cartan Struktur gibt es nun einige, die Torsion \mathbf{Z} betreffende, Identitäten. In unserem Fall nehmen diese eine ganz bestimmte Form an, da wir uns mit einer fast Riemannschen Struktur beschäftigen. Wenn wir dieser Struktur die Frobeniuschen Integrabilitätsbedingungen für die Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ hinzufügen, nimmt die Torsion eine Gestalt an, die es uns ermöglicht sie vollständig zu eliminieren.

Betrachten wir dazu zuerst die zweite Bianchi Identität

$$R^\lambda_{\sigma[\mu\nu;\rho]} = 2R^\lambda_{\sigma\kappa[\rho}Z^\kappa_{\mu\nu]} . \quad (\text{VI.96})$$

Diese Identität ist identisch erfüllt, da die linke Seite aufgrund der kovarianten Konstanz der Krümmung verschwindet (s. (VI.92)), während auf der rechten Seite die Krümmung \mathbf{R} den charakteristischen Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ in \mathbf{Z} annihiliert. (Vgl. (VI.41), (VI.42) und (VI.78)). Deshalb erhalten wir aus dieser Gleichung keine Einschränkung für die Torsion.

Ganz anders liegt der Fall für die erste Bianchi Identität

$$-R^\rho_{[\mu\nu\lambda]} = 2\nabla_{[\mu}Z^\rho_{\nu\lambda]} + 4Z^\kappa_{[\mu\nu}Z^\rho_{\lambda]\kappa} . \quad (\text{VI.97})$$

Die linke Seite verschwindet, da der Krümmungstensor all die Symmetrieeigenschaften eines gewöhnlichen Riemannschen Tensors erfüllt. Aus diesem Grund gehorcht die Torsion folgender Gleichung

$$\nabla_{[\mu}Z^\rho_{\nu\lambda]} + 2Z^\kappa_{[\mu\nu}Z^\rho_{\lambda]\kappa} = 0 . \quad (\text{VI.98})$$

Falls die charakteristische Distribution integrabel ist, läßt sich dieser Ausdruck weiter vereinfachen. Die Frobeniussche Integrabilitätsbedingung für den Normalenvektor $\hat{\mathbf{p}}$ von $\hat{\Delta}$ lautet [19]

$$\partial_{[\mu}\hat{p}_{\lambda]} = f_{[\lambda}\hat{p}_{\mu]} . \quad (\text{VI.99})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen

$$f^\mu\hat{p}_\mu = 0, \quad (\text{VI.100})$$

und demzufolge nimmt die Torsion der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$, in Übereinstimmung mit (VI.47), folgende, spezielle Form an:

$$Z^\lambda_{\mu\nu} = -g_{00}\hat{p}^\lambda\hat{p}_{[\mu}f_{\nu]} . \quad (\text{VI.101})$$

Wegen dieser speziellen Form der Torsion \mathbf{Z} verschwinden die nichtlinearen Terme in (VI.98) und es verbleibt noch

$$\nabla_{[\mu}Z^\rho_{\nu\lambda]} = 0 . \quad (\text{VI.102})$$

Eine weitere Besonderheit der speziellen Gestalt der Torsion \mathbf{Z} (VI.101) ist die Relation

$$Z^\lambda_{\mu\nu} + Z_{\dot{\nu}}^{\dot{\lambda}}{}_{\mu} + Z_{\dot{\mu}\nu}^{\dot{\lambda}} = 0 . \quad (\text{VI.103})$$

Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck für die Kontorsion \mathbf{K} (VI.64) zu

$$K^\lambda{}_{\mu\nu} = 2Z_{\dot{\nu}\mu}{}^\lambda . \quad (\text{VI.104})$$

Wir sehen, daß die Integrabilität von $\overset{\cap}{\Delta}$ eine spezielle Riemann-Cartan Geometrie erzeugt, welche einer Riemannschen Geometrie ziemlich nahe kommt. Dies zeigt sich besonders deutlich wenn man die Bewegung eines Testteilchens in dieser Geometrie untersucht. Hierbei taucht jedoch in einer Riemann-Cartanschen Geometrie eine gewisse Zweideutigkeit auf [13]. Wir müssen uns nämlich überlegen, ob das Testteilchen einer autoparallelen oder einer geodätischen Bewegung unterliegt. Für einen streng Riemannschen Raum stimmen beide Bewegungsformen überein und das Bewegungsproblem ist eindeutig. Die Zweideutigkeit existiert selbstverständlich auch für den vorliegenden Riemann-Cartan Raum, wenn auch in einer etwas schwächeren Form. Wir erinnern uns, daß der (Einheits) Tangentenvektor \mathbf{t} , entlang einer autoparallelen Kurve, bezüglich der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ parallel verschoben wird:

$$t^\lambda \nabla_\lambda t^\mu = 0 \quad (\text{VI.105})$$

$$\left(t^\lambda \equiv \frac{dx^\lambda}{ds} \right) . \quad (\text{VI.106})$$

Das gleiche gilt für eine geodätische Kurve, jedoch wird hier bezüglich des Riemannschen Teils $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ von $\mathbf{\Gamma}$ parallel verschoben (s. (VI.62)).

$$t^\lambda \tilde{\nabla}_\lambda t^\mu = 0 . \quad (\text{VI.107})$$

Die entsprechenden Differentialgleichungen für die Bewegung des Testteilchens lauten

$$\frac{D^2 x^\mu}{ds^2} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (\text{VI.108.a})$$

$$\frac{\tilde{D}^2 x^\mu}{ds^2} \equiv \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 . \quad (\text{VI.108.b})$$

Die Lösungen dieser Gleichungen werden sich nun im allgemeinen Fall unterscheiden (s. Abschnitt (VI.6)).

Im vorliegenden Fall, der durch die Gleichungen (VI.101) und (VI.104) charakterisiert wird, unterscheiden sich die zwei Differentialoperatoren in den Gleichungen (VI.108.a) und (VI.108.b) durch einen Torsionsterm.

$$\frac{D^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{\tilde{D}^2 x^\mu}{ds^2} + 2Z_{\lambda\nu}{}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 . \quad (\text{VI.109})$$

Aus diesem Grund stimmen die beiden Bewegungstypen überein falls folgende Bedingung erfüllt ist

$$Z_{\lambda\nu}{}^\mu t^\nu t^\lambda = 0 . \quad (\text{VI.110})$$

Das heißt falls die Bewegung des Testteilchens auf die charakteristische Fläche beschränkt bleibt. Aufgrund des Frobeniusschen Theorems wird der gesamte Raum aus charakteristischen Flächen aufgebaut, so daß die oben erwähnte Zweideutigkeit bezüglich der Teilchenbewegung beseitigt ist, sofern die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{t} des Teilchens im Startpunkt orthogonal zum charakteristischen Vektor $\hat{\mathbf{p}}$ ist. Mit anderen Worten, die autoparallelen und geodätischen Teilchenbahnen sind auf der charakteristischen Fläche identisch. Man beachte, daß auch der Paralleltransport bezüglich der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ die Bewegung nicht von der charakteristischen Fläche wegführt (s. Gl. (VI.38)).

Wir sehen nun, daß wir mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung die Zweideutigkeit bei der Bestimmung der Teilchenbewegung in der Riemann-Cartanschen Struktur teilweise beseitigen können. Im folgenden Abschnitt werden wir die Möglichkeit untersuchen, wie sich dies vollständig bewerkstelligen läßt, indem man eine streng Riemannsche Struktur einführt.

VI.4.2 Übergang zu einer Riemannschen Struktur

Die Frobenius Bedingung (VI.99) erlaubt wesentlich weitgehendere Schlußfolgerungen

als das aus den vorhergehenden Betrachtungen zu entnehmen ist. Sie ermöglicht es uns nun in der Tat die Torsion vollständig zu eliminieren, so daß die Geometrie streng Riemannsch wird. Überraschenderweise zeigt es sich dann, daß die entsprechende Konnexion nicht mit dem Riemannschen Teil $\tilde{\Gamma}$ der Standard-Konnexion Γ (VI.62) identisch ist.

Um diese neue Konnexion Γ^* , die sog. *charakteristische Konnexion*, zu finden, betrachten wir zuerst die Standard-Konnexion Γ (VI.62) für den Fall, daß die Integrabilitätsbedingung gilt. Mit Hilfe der Gleichungen (VI.104), (VI.47) und (VI.99) erhalten wir

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - g_{00} \hat{p}_\nu \left(\hat{p}_\mu f^\lambda - \hat{p}^\lambda f_\mu \right) . \quad (\text{VI.111})$$

Die Integrabilitätsbedingung impliziert ferner die Existenz einer Funktion Φ , welche wir dazu benützen wollen, folgendermaßen einen Gradientenvektor \mathbf{C} zu definieren:

$$C_\mu = f_\mu + \Phi \hat{p}_\mu \quad (\text{VI.112.a})$$

$$\partial_{[\mu} C_{\nu]} = 0 . \quad (\text{VI.112.b})$$

Mit Hilfe dieses Gradientenfeldes läßt sich die Standard-Konnexion Γ (VI.111) folgendermaßen ausdrücken

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - g_{00} \hat{p}_\nu \left(\hat{p}_\mu C^\lambda - \hat{p}^\lambda C_\mu \right) . \quad (\text{VI.113})$$

Um zur gesuchten charakteristischen Konnexion Γ^* zu gelangen, spalten wir Γ in folgender Weise auf:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + K^\lambda_{\mu\nu} , \quad (\text{VI.114})$$

mit

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} - g_{00} C^\lambda \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu + g_{00} \hat{p}^\lambda (\hat{p}_\nu C_\mu - \hat{p}_\mu C_\nu) \quad (\text{VI.115.a})$$

und

$$K^{\lambda}_{\mu\nu} = -g_{00} \hat{p}^{\lambda} \hat{p}_{\mu} C_{\nu} . \quad (\text{VI.115.b})$$

Bevor wir jetzt anstelle von Γ mit $\overset{*}{\Gamma}$ arbeiten können, müssen wir uns davon überzeugen, daß die in den Abschnitten (VI.2) und (VI.3) gefundenen Eigenschaften von Γ nicht durch $\overset{*}{\Gamma}$ zerstört werden. Als erstes bemerken wir dazu, daß die charakteristische Konnexion $\overset{*}{\Gamma}$ den gleichen wesentlichen Teil γ (VI.22) wie die Standard-Konnexion Γ besitzt. Um weiter die Änderung der Krümmung (VI.39) zu untersuchen, geben wir deren, durch (VI.114) induzierte, Aufspaltung an:

$$R^{\lambda}_{\nu\mu\sigma} = \overset{*}{R}^{\lambda}_{\nu\mu\sigma} + \nabla_{\mu} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\mu} + \overset{*}{K}^{\lambda}_{\rho\sigma} \overset{*}{K}^{\rho}_{\nu\mu} - \overset{*}{K}^{\lambda}_{\rho\mu} \overset{*}{K}^{\rho}_{\nu\sigma} + 2Z^{\rho}_{\sigma\mu} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\rho} . \quad (\text{VI.116})$$

Die besondere Struktur der Kontorsion $\overset{*}{\mathbf{K}}$ (VI.115.b) impliziert nun das Verschwinden der quadratischen Terme auf der rechten Seite von Gleichung (VI.116). Benützt man weiter die kovariante Konstanz von $\hat{\mathbf{p}}$ (VI.34) zusammen mit Gleichung (VI.19), so gilt:

$$\nabla_{\mu} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\mu} = 2Z^{\rho}_{\mu\sigma} \overset{*}{K}^{\lambda}_{\nu\rho} . \quad (\text{VI.117})$$

Wir sehen also aus Gleichung (VI.116), daß die Krümmung unverändert bleibt

$$R^{\lambda}_{\nu\mu\sigma} = \overset{*}{R}^{\lambda}_{\nu\mu\sigma} . \quad (\text{VI.118})$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß eine Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ existiert, so daß die neue Konnexion $\overset{*}{\Gamma}$ gerade die Levi-Civita Konnexion von $\overset{*}{\mathbf{G}}$ ist; das heißt es muß gelten

$$\overset{*}{\nabla}_{\lambda} \overset{*}{G}_{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{VI.119})$$

Solch eine Riemannsche Metrik, die sog. *charakteristische* Metrik, läßt sich leicht finden, indem wir den Gradienten \mathbf{C} folgendermaßen ausdrücken

$$C_{\mu} = \psi^{-1} \partial_{\mu} \psi = \partial_{\mu} \ln \psi . \quad (\text{VI.120})$$

Berücksichtigen wir weiter, daß der umskalierte charakteristische Vektor \mathbf{p}

$$p_\mu = \psi \hat{p}_\mu \quad (\text{VI.121})$$

bezüglich der charakteristischen Konnexion $\overset{*}{\Gamma}$ konstant ist

$$\overset{*}{\nabla}_\lambda p_\mu = 0 , \quad (\text{VI.122})$$

so impliziert dies, daß \mathbf{p} ein Gradientenvektor und ψ demzufolge ein integrierender Faktor für $\hat{\mathbf{p}}$ ist. Gehen wir analog Gleichung (VI.53) vor, so ergibt sich die neue Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ zu

$$\overset{*}{G}_{\mu\nu} = \epsilon^2 B_{\mu\nu} + g_{00} p_\mu p_\nu , \quad (\text{VI.123})$$

was mit der Forderung nach kovarianter Konstanz (VI.119) konsistent ist. Die charakteristische Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ definiert nun die von uns gesuchte Riemannsche Struktur! Man beachte, daß der reskalierte charakteristische Vektor \mathbf{p} bezüglich der Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ die Einheitslänge besitzt:

$$p^\mu p_\mu = \overset{*}{G}_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = g_{00} \quad (\text{VI.124.a})$$

$$p^\mu = \psi^{-1} \hat{p}^\mu . \quad (\text{VI.124.b})$$

Es taucht die Frage auf, ob die in Abschnitt (VI.3.3) definierte verallgemeinerte Konformalität der Riemann-Cartan Struktur in die gewöhnliche konformal flache Struktur eines rein Riemannschen Raumes übergeht. Eine Berechnung des Weylschen Tensors (VI.88) unter Verwendung der charakteristischen Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ zeigt, daß dieser in der Tat, sowohl im intrinsischen Fall ($n = 3$), als auch im extrinsischen Fall ($n = 4$), verschwindet. Man beachte, daß der Krümmungstensor \mathbf{R} , der Ricci Tensor \mathcal{R} , der Skalar \mathcal{S} , und die Fasermetric $\overset{\cap}{\mathbf{G}}$ die gleichen Objekte sowohl im Riemannschen, als auch im nicht-Riemannschen Fall sind, wogegen die Konnexionen $\Gamma, \overset{*}{\Gamma}$ und die Metrikensoren $\mathbf{G}, \overset{*}{\mathbf{G}}$ sich in den beiden Fällen, entlang der charakteristischen

Richtung unterscheiden. Auf jeden Fall ist die Riemannsche Struktur konformal flach, obwohl die Riemannsche Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ im allgemeinen der Minkowskischen- bzw. Euklidischen Metrik \mathbf{g} nicht proportional ist. Aus diesem Grunde muß es eine Koordinatentransformation geben, welche $\overset{*}{\mathbf{G}}$ proportional zu \mathbf{g} macht. In speziellen Fällen (z.B. der Euklidischen Dimeron Lösung) ist diese Proportionalität schon für das kartesische Koordinatensystem erreicht! Die charakteristischen Flächen sind 3-dimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeiten, welche eine konstante Krümmung aufweisen.

Der Übergang zu einer streng Riemannschen Struktur beseitigt also die Zweideutigkeit in der Riemann-Cartan Geometrie was die Bewegung von Testteilchen betrifft. Um diesen mathematischen Sachverhalt auf eine physikalische Situation anzuwenden, ist es sinnvoll die charakteristische Konnexion $\overset{*}{\mathbf{\Gamma}}$ gegenüber der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ zu verwenden, was aufgrund der Integrabilitätsbedingung hier ja möglich ist. Auf den Integralfächen von $\overset{\cap}{\Delta}$ finden wir folgende Bewegungsgleichung für die Geodäten:

$$\frac{\overset{*}{D}^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{D^2 x^\mu}{ds^2} - \overset{*}{K}{}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 . \quad (\text{VI.125})$$

Wir sehen also, daß die Geodäten der Metrik $\overset{*}{\mathbf{G}}$ auf den charakteristischen Flächen sowohl mit den Geodäten der Riemann-Cartan Metrik \mathbf{G} als auch mit den Autoparallelen der Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ übereinstimmen. Letztere können wir deshalb als die Fortsetzung der Geodäten in den einbettenden Raum betrachten. Diese Schlußfolgerung gilt, wie schon erwähnt, nur für den Fall, daß die charakteristische Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ integrabel ist. Andernfalls existieren keine charakteristische Flächen und demzufolge auch kein $\overset{*}{\mathbf{\Gamma}}$!

VI.5 Die Yang-Mills Gleichungen

Bis jetzt haben wir uns hauptsächlich mit allgemeinen, trivialisierbaren Feld*konfigu-*

rationen beschäftigt, welche die Yang-Mills Gleichungen im allgemeinen nicht erfüllen. Wir wollen uns nun den trivialisierbaren *Lösungen* der homogenen Yang-Mills Gleichung zuwenden, welche eine Untermenge der allgemeinen Konfigurationen bilden. Es wird sich zeigen, daß die Feldgleichungen eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Existenz von charakteristischen Flächen darstellen. Ferner implizieren die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes die Existenz einer streng Riemannschen Struktur zusätzlich zu der allgemeineren und immer vorhandenen Riemann-Cartan Struktur, vorausgesetzt die charakteristische Distribution ist integrabel. Die Kombination dieser zwei Argumente besagt nun nichts anderes, als daß die Gültigkeit der Yang-Mills Gleichungen die Existenz einer Riemannschen Struktur sichert. Die allgemeinen Eigenschaften solch einer „Riemann-Yang-Mills“-Struktur sollen in diesem Abschnitt untersucht werden.

VI.5.1 Die geometrische Bedeutung der Feldgleichungen

Im folgenden wollen wir annehmen, daß die trivialisierbaren Eichfelder die homogenen Yang-Mills Gleichungen erfüllen

$$D^\mu F_{i\mu\nu} = 0 . \quad (\text{VI.126})$$

Um die geometrischen Eigenschaften dieser Feldgleichungen zu untersuchen, beachten wir daß die intrinsische Krümmung \mathbf{F} für jedes trivialisierbare Eichfeld \mathbf{A} nach Gleichung (VI.4.a) durch die extrinsische Krümmung \mathbf{B} ausgedrückt werden kann. Aus diesem Grund läßt sich die Yang-Mills Gleichung (VI.126) mit Hilfe der \mathbf{B} -Felder formulieren

$$D^\mu F_{i\mu\nu} = g_{00} \epsilon_i^{jk} B_{k\mu} \left(D^\mu B_{j\nu} - \hat{P}^\mu{}_\nu (D^\lambda B_{j\lambda}) \right) = 0 . \quad (\text{VI.127})$$

Definieren wir nun die Tensorgröße \mathbf{T} durch

$$D_\mu B_{j\nu} - \hat{P}_{\mu\nu} (D^\lambda B_{j\lambda}) = T^\lambda{}_{\nu\mu} B_{j\lambda} , \quad (\text{VI.128})$$

so gilt folgende Beziehung zwischen \mathbf{T} und dem wesentlichen Teil γ (VI.22)

$$T^\lambda{}_{\nu\mu} = \gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \hat{P}_{\mu\nu} \gamma^{\lambda\sigma}{}_\sigma . \quad (\text{VI.129})$$

Aufgrund von Gleichung (VI.22) annihiliert $\hat{\mathbf{p}}$ das Objekt \mathbf{T}

$$\hat{p}_\lambda T^\lambda{}_{\nu\mu} = 0 ; \quad (\text{VI.130})$$

ferner ist \mathbf{T} symmetrisch in den letzten zwei Indizes

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = T^\lambda{}_{\nu\mu} . \quad (\text{VI.131})$$

Die homogene Yang-Mills Gleichung läßt sich nun mit Hilfe von \mathbf{T} folgendermaßen ausdrücken

$$D^\mu F_{i\mu\nu} \equiv g_{00} F_i{}^{\lambda\mu} T_{\lambda\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0 , \quad (\text{VI.132})$$

In dieser Form läßt sich für das Yang-Mills Problem sofort eine allgemeine Lösung angeben: Vergegenwärtigen wir uns, daß die Krümmungskoeffizienten \mathbf{F}_i für jeden nicht entarteten Punkt \mathbf{x} des Basisraumes drei linear unabhängige 2-Formen aus $\bigcap \Delta_x$ darstellen, so lautet die allgemeinste Form für \mathbf{T}

$$T_{\lambda\mu\nu} = S_{\lambda\mu\nu} + S_{\lambda\mu} \hat{p}_\nu + S_{\lambda\nu} \hat{p}_\mu + S_{\mu\nu} \hat{p}_\lambda . \quad (\text{VI.133})$$

Die hier eingeführten Objekte \mathbf{S} liegen vollständig in dem zu $\bigcap \tau_4$ korrespondierenden assoziiertem Tensorbündel, das heißt es gilt z.B.

$$\hat{p}^\lambda S_{\lambda\mu\nu} = \hat{p}^\lambda S_{\lambda\mu} = \hat{p}^\lambda S_\lambda = 0 . \quad (\text{VI.134})$$

Damit die Yang-Mills Gleichungen erfüllt werden, müssen die Größen \mathbf{S} total symmetrisch sein

$$S_{\lambda\mu\nu} = S_{\mu\lambda\nu} = S_{\mu\nu\lambda} , \quad (\text{VI.135.a})$$

$$S_{\mu\lambda} = S_{\lambda\mu} . \quad (\text{VI.135.b})$$

Da jetzt die allgemeine Gestalt von \mathbf{T} bekannt ist, können wir aus Gleichung (VI.129) den wesentlichen Teil γ bestimmen

$$\gamma^\lambda_{\nu\mu} = S^\lambda_{\nu\mu} + S^\lambda_\mu \hat{p}_\nu + S^\lambda_\nu \hat{p}_\mu + S^\lambda \hat{p}_\nu \hat{p}_\mu - \frac{1}{2} \hat{P}_{\nu\mu} (S^{\lambda\sigma}{}_\sigma + g_{00} S^\lambda) . \quad (\text{VI.136})$$

Damit ergibt sich die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ zu

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \gamma^\lambda_{\nu\mu} - \hat{p}^\lambda (S_{\nu\mu} + S_\nu \hat{p}_\mu) . \quad (\text{VI.137})$$

Die geometrische Bedeutung der Yang-Mills Gleichung wird nun deutlich: Betrachten wir die Ableitung des charakteristischen Vektors, so erhalten wir mit (VI.137)

$$\partial_\mu \hat{p}_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \hat{p}_\lambda = -g_{00} (S_{\nu\mu} + S_\nu \hat{p}_\mu) , \quad (\text{VI.138})$$

was nichts anderes bedeutet, als daß die Integrabilität der charakteristischen Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ aufgrund der Yang-Mills Gleichung nun gewährleistet ist. Denn jetzt gilt (vgl. mit (VI.99))

$$\partial_{[\mu} \hat{p}_{\nu]} = -g_{00} S_{[\nu} \hat{p}_{\mu]} . \quad (\text{VI.139})$$

Die Gestalt der charakteristischen Flächen läßt sich nach Gleichung (VI.138) durch $S_{\mu\nu}$ und dem *Torsionsvektor* S_μ bestimmen

$$\hat{P}^\lambda_\mu \partial_\lambda \hat{p}_\nu = -g_{00} S_{\mu\nu} \quad (\text{VI.140.a})$$

$$S_\nu \equiv -\hat{p}^\mu \partial_\mu \hat{p}_\nu \quad (\text{VI.140.b})$$

Man beachte, daß der Torsionsvektor nur dann ungleich Null ist, falls die charakteristischen Linien, bezüglich der kanonischen Konnexion $\overset{\circ}{\omega}$ über \mathbf{E}_4 bzw \mathbf{M}_4 , keine Geraden sind. Aus diesem Grund besitzt die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ eine nicht-verschwindende Torsion \mathbf{Z}

$$Z^\lambda_{\mu\nu} = \hat{p}^\lambda \hat{p}_{[\mu} S_{\nu]} , \quad (\text{VI.141})$$

welche die Abweichung der charakteristischen Linien von euklidischen bzw. minkowskischen Geodäten angibt. (Die charakteristischen Linien sind natürlich Geodäten bezüglich der charakteristischen Metrik \mathbf{G}^*)

Aus Gleichung (VI.138) können wir nun noch eine weitere Konsequenz ziehen. Betrachten wir zwei trivialisierbare Eichfelder \mathbf{A} , welche identische charakteristische Flächen aufweisen sollen und die sich nicht durch eine Eichtransformation ineinander überführen lassen, so basieren ihre Standard-Konnexionen $\mathbf{\Gamma}$ auf den gleichen Objekten S_μ und $S_{\mu\nu}$; sie unterscheiden sich jedoch bezüglich der $S_{\lambda\mu\nu}$.

VI.5.2 Die Riemann-Yang-Mills Struktur

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß die Yang-Mills Gleichung eine hinreichende Bedingung für die Integrabilität der charakteristischen Distribution $\overset{\cap}{\Delta}$ darstellt. Vom physikalischen Standpunkt aus gesehen ist es eine befriedigende Situation die ziemlich formale Bedingung der Integrabilität durch eine dynamische Feldgleichung ausdrücken zu können. Wir erhalten als Ergebnis eine Art Riemann-Yang-Mills Raum-Zeit Struktur, welche auf einer flachen Hintergrundgeometrie aufgebaut ist.

Der Übergang zu einer Riemannschen Konnexion $\mathbf{\Gamma}^*$ wird durch die Argumente von Abschnitt (VI.4.2) begründet. Benützen wir die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ (VI.137), die wir aus der homogenen Yang-Mills Gleichung hergeleitet hatten, so erhalten wir mit Hilfe von (VI.114), (VI.115.a) und (VI.115.b) sofort einen Ausdruck für die charakteristische Konnexion $\mathbf{\Gamma}^*$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + g_{00} \hat{p}^\lambda \hat{p}_\mu C_\nu . \quad (\text{VI.142})$$

Um die Rechnung zu vereinfachen werden wir in diesem Ausdruck nicht das Ergebnis (VI.137) für die Standard-Konnexion $\mathbf{\Gamma}$ einsetzen, sondern wir werden $\mathbf{\Gamma}^*$ durch eine

konformal flache Konnexion $\bar{\Gamma}$ ausdrücken, welche folgendermaßen definiert ist:

$$\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} = g^\lambda{}_\mu C_\nu + g^\lambda{}_\nu C_\mu - C^\lambda g_{\mu\nu} . \quad (\text{VI.143})$$

$\bar{\Gamma}$ ist die Levi-Civita Konnexion einer konformal flachen Metrik \bar{G}

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \psi^2 g_{\mu\nu} . \quad (\text{VI.144})$$

Die konformal flache Konnexion $\bar{\Gamma}$ läßt sich nun leicht in Gleichung (VI.142) einfügen, wenn wir die Beziehung zwischen dem Gradienten \mathbf{C} (VI.112.a) und dem Torsionsvektor \mathbf{S} (VI.139) benützen

$$S_\mu = -g_{00} \hat{P}^\nu{}_\mu C_\nu \quad (\text{VI.145.a})$$

$$\Phi = g_{00} (\hat{p}^\nu C_\nu) . \quad (\text{VI.145.b})$$

Definieren wir ferner die Abweichungen $(s_{\lambda\mu\nu}, s_{\lambda\mu})$ der symmetrischen Tensoren $(S_{\lambda\mu\nu}, S_{\lambda\mu})$ von ihren konformal flachen Werten $(\bar{S}_{\lambda\mu\nu}, \bar{S}_{\lambda\mu})$, welche durch

$$\bar{S}_{\lambda\mu\nu} = \hat{P}_{\lambda\mu} S_\nu + \hat{P}_{\mu\nu} S_\lambda + \hat{P}_{\nu\lambda} S_\mu \quad (\text{VI.146.a})$$

und

$$\bar{S}_{\mu\nu} = \Phi \hat{P}_{\mu\nu} \quad (\text{VI.146.b})$$

gegeben sind, so gilt:

$$S_{\lambda\mu\nu} = \bar{S}_{\lambda\mu\nu} + s_{\lambda\mu\nu} \quad (\text{VI.147.a})$$

$$S_{\lambda\nu} = \bar{S}_{\lambda\nu} + s_{\lambda\nu} \quad (\text{VI.147.b})$$

$$S_\lambda = \bar{S}_\lambda . \quad (\text{VI.147.c})$$

Damit finden wir für die charakteristische Konnexion $\bar{\Gamma}^*$ folgenden Ausdruck

$$\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \bar{Q}^{\lambda}_{\mu\nu} . \quad (\text{VI.148})$$

Hierbei setzt sich die Abweichung \bar{Q} der charakteristischen Konnexion $\bar{\Gamma}^*$ von $\bar{\Gamma}$ aus den Abweichungen s von \bar{S} wie folgt zusammen:

$$\bar{Q}^{\lambda}_{\mu\nu} = s^{\lambda}_{\mu\nu} + s^{\lambda}_{\mu} \hat{p}_{\nu} + s^{\lambda}_{\nu} \hat{p}_{\mu} - \frac{1}{2} \hat{P}_{\mu\nu} s^{\lambda\sigma}_{\sigma} \quad (\text{VI.149})$$

Die Zerlegung von $\bar{\Gamma}^*$ in den konformal flachen Teil $\bar{\Gamma}$ und den Rest \bar{Q} berücksichtigt die Tatsache, daß es im Riemannschen Fall keine Torsion \mathbf{Z} gibt, obwohl ein nicht verschwindender Torsionsvektor S_{μ} in der Theorie existiert. Der Grund hierfür besteht darin, daß die charakteristischen Linien im allgemeinen Fall gekrümmt sind (vgl. (VI.140.b)). Dieser anscheinende Widerspruch wird nun gerade durch die Aufspaltung (VI.148) beseitigt, indem der Torsionsvektor in $\bar{\Gamma}$ absorbiert wird. Der verbleibende Teil \bar{Q} wird dann vollständig torsionsfrei, sieht aber sonst wie die Standard-Konnexion Γ aus.

\bar{Q} definiert eine zusätzliche Struktur über der konformal flachen Hintergrundmetrik. Diese Metrik ist nun durch Gleichung (VI.144) gegeben und gehorcht der Bedingung

$$\nabla^*_{\lambda} \bar{G}_{\mu\nu} = 2Q_{\mu\nu\lambda} . \quad (\text{VI.150})$$

Löst man diese Gleichung nach der charakteristischen Konnexion auf, so ergibt sich die Aufspaltung (VI.148), wobei \bar{Q} durch die Größe \mathbf{Q} ⁶ ausgedrückt wird.

$$\bar{Q}^{\lambda}_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}{}^{\bar{\lambda}} - \left(Q^{\bar{\lambda}}_{\nu\mu} + Q^{\bar{\lambda}}_{\mu\nu} \right) \quad (\text{VI.151})$$

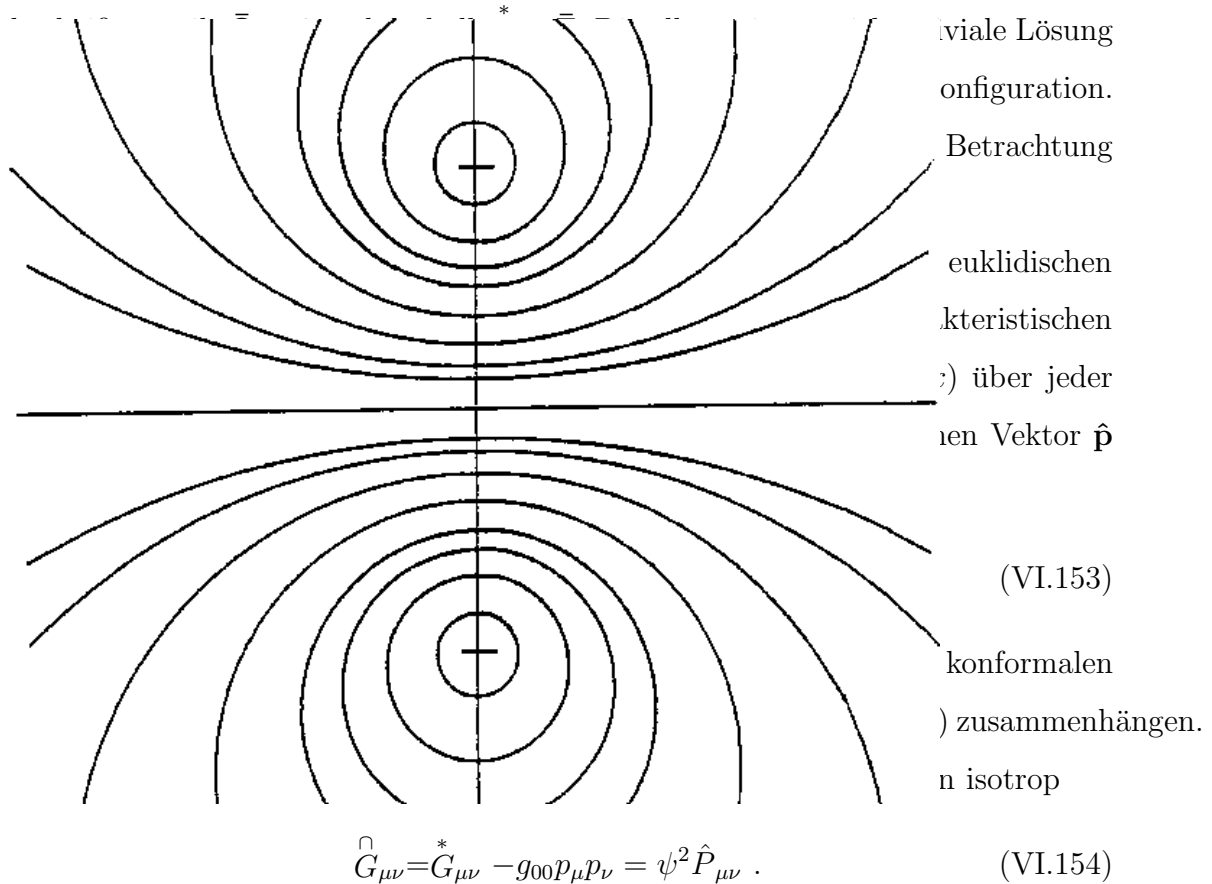
Hierbei ist \mathbf{Q} der symmetrische Teil Σ' von \bar{Q} :

$$Q_{\mu\nu\lambda} = -\Sigma'_{\bar{\mu}\nu\lambda} \equiv -\frac{1}{2} (\bar{Q}_{\bar{\mu}\nu\lambda} + \bar{Q}_{\bar{\nu}\mu\lambda}) \quad (\text{VI.152.a})$$

$$\Sigma'^{\lambda}_{\mu\nu} = s^{\lambda}_{\mu\nu} + s^{\lambda}_{\mu} \hat{p}_{\nu} - \frac{1}{4} \left(\hat{P}_{\mu\nu} s^{\lambda\sigma}_{\sigma} + \hat{P}^{\lambda}_{\nu} s_{\mu\sigma}{}^{\sigma} \right) \quad (\text{VI.152.b})$$

⁶Indizes mit einem Querbalken werden mit Hilfe der Hintergrundmetrik (VI.144) bewegt.

Die einfachsten Lösungen sind nun vom *konformal flachen* Typ. Aufgrund ihrer Definition besteht diese Lösungsklasse aus reinen Hintergrund Konfigurationen,



Umgekehrt ersieht man daraus, daß jede isotrope Lösung notwendigerweise konformal flach ist, und deshalb mit der Dimeron Lösung übereinstimmen muß. Wir können Abbildung VI.1: Die charakteristischen Flächen der Dimeron-Lösung sind 3- deshalb die Schlußfolgerung ziehen, daß die nicht-triviale Hintergrundlösung immer Sphären $\Phi(\mathbf{x}) = \text{konst.}$ (vgl. (VI.153)). Wenn die Meron-Zentren sich bei $x^0 = a, b$ befinden, lautet die Gleichung für die charakteristischen Flächen mit dem Radius Φ_{-1} die höchste Symmetrie, die in der gesamten Lösungsmenge gefunden werden kann.

VI.6 Geodätische und autoparallele Kurven

In einer nicht-Riemannschen Struktur können geodätische und autoparallele

Kurven beträchtliche Unterschiede aufweisen. Dies gilt ebenfalls für die vorliegende fast Riemannsche Struktur, welche auf den charakteristischen Flächen streng Riemannsch wird. Wir wollen nun beide Typen von Kurven anhand der euklidischen Dimeron-Lösung untersuchen.

Betrachten wir zuerst die Geodätengleichung (VI.125) für den Riemannschen Fall

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 , \quad (\text{VI.155})$$

wobei die konformal flache Konnexion $\bar{\Gamma}$ durch Gleichung (VI.143) gegeben ist, mit folgendem konformalen Skalenfaktor[11]

$$\psi = \frac{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}| |\mathbf{x} - \mathbf{b}|} . \quad (\text{VI.156})$$

Das in (VI.155) benützte Linienelement ds wird durch die konformal flache Metrik $\bar{\mathbf{G}}$ aus Gleichung (VI.144) bestimmt

$$ds^2 = \bar{G}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (\text{VI.157})$$

Da wir in einem euklidischen Raum rechnen, erweist es sich als günstiger wenn wir das euklidische Linienelement benützen

$$d\sigma^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (\text{VI.158})$$

mit welchem die Bewegungsgleichung (VI.155) folgende Form annimmt

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \hat{h}^\mu{}_\rho \bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0 . \quad (\text{VI.159})$$

Der hierbei auftauchende Projektor $\hat{\mathbf{h}}$ annihiliert die Vierergeschwindigkeit $dx^\lambda/d\sigma$ und sieht daher folgendermaßen aus:

$$\hat{h}^\mu{}_\rho = g^\mu{}_\rho + \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx_\rho}{d\sigma} . \quad (\text{VI.160})$$

Setzen wir die konformal flache Konnexion $\bar{\Gamma}$ in (VI.159) ein, erhalten wir eine Bewegungsgleichung, wie man sie aus der Speziellen Relativitätstheorie kennt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} = F^\mu . \quad (\text{VI.161})$$

Hierbei steht die Viererkraft \mathbf{F} senkrecht auf der Vierergeschwindigkeit, d.h.

$$F^\mu = -\hat{h}^\mu{}_\rho C^\rho , \quad (\text{VI.162})$$

wie es für die „relativistische“ Konsistenz notwendig ist.

Für die numerische Auswertung erweist es sich jedoch als vorteilhaft, wenn wir mit einer Gleichung vom Newtonschen Typ rechnen. Diese erhalten wir aus der relativistischen Form (VI.162) durch eine Parametertransformation, welche die „Eigenzeit“ σ folgendermaßen in die „Newtonsche Zeit“ τ überführt:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \psi \quad (\text{VI.163})$$

Somit lautet die Newtonsche Form der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\partial_\mu \mathcal{V} , \quad (\text{VI.164})$$

mit dem Potential \mathcal{V}

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{2}\psi^2 . \quad (\text{VI.165})$$

Diese Bewegungsgleichung beschreibt die Bewegung eines Testteilchens in Gegenwart zweier anziehender Zentren die an den Meron Orten \mathbf{a} und \mathbf{b} lokalisiert sind (s. Bild 2). Die „nicht-relativistische“ Form der Bewegungsgleichung (VI.164) und ihre „relativistische“ Form ermöglichen es uns nun, die geodätischen Linien mit der Terminologie der Newtonschen Mechanik zu untersuchen. Kontrahieren wir (VI.164) mit der Geschwindigkeit $dx_\mu/d\tau$, so ergibt sich ein Energieerhaltungsgesetz in der Form

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau} (\mathcal{T} + \mathcal{V}) = 0 . \quad (\text{VI.166})$$

Ferner zeigt sich, daß die gesamte Energie $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$ Null ist, da die Geschwindigkeit des Testteilchens mit der konformalen Skalenfunktion ψ übereinstimmt (vgl (VI.163)), so daß wir für die kinetische Energie \mathcal{T} erhalten

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = +\frac{1}{2} \psi^2 = -\mathcal{V} . \quad (\text{VI.167})$$

Das bedeutet, daß sich das Testteilchen, welches sich auf einer Geodäten bewegt, in einem gebundenen Zustand befindet und nicht ins Unendliche gelangen kann.

Diese Aussage können wir noch weiter präzisieren, indem wir die ursprüngliche, „relativistische“ Form der Bewegungsgleichung (VI.107) betrachten. Da die zwei Einheitsvektoren \mathbf{t} und \mathbf{p} entlang einer Geodäten parallel verschoben werden, bleibt der euklidische Winkel α , welcher von beiden eingeschlossen wird, konstant. Das heißt, daß der Winkel α , unter dem eine Geodäte die charakteristische Flächen schneidet, entlang dieser Kurve eine konstante Größe ist. Da jede charakteristische Fläche gerade eines der beiden Meronzentren umschließt (s. Bild 1), muß jede Geodäte entweder in einem Meronzentrum endigen, oder sie ist eine, auf der charakteristischen Fläche liegende, geschlossene Kurve. Die Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf den Multi-Meron Fall ist offenkundig; vorausgesetzt er existiert. Bild 3 zeigt den Verlauf der Geodäten, die sich aus der „Newtonschen“ Bewegungsgleichung (VI.164) in zwei Dimensionen ergeben (Beschränkung der geodätischen Bewegung auf eine 2-Ebene durch die $SO(3)$ -Symmetrieachse der Dimeron-Konfiguration) .⁷

Als nächstes wollen wir, ausgehend von Gleichung (VI.108.a), die autoparallelen Trajektorien des Testteilchens unter dem Einfluß der Riemann-Cartan Geometrie untersuchen. Die autoparallele Bewegungsgleichung unterscheidet sich von der Geodätischen durch den Einfluß der Kontorsion \mathbf{K}^* (VI.115.b). Dieser Term wird

⁷Inzwischen haben sich durch eine neuere Untersuchung[24] weitere Hinweise ergeben, daß die geodätischen Linien in einer Riemannschen Struktur vom trivialisierbaren Typ stets auf die topologischen Punktdefekte zulaufen und dort endigen, falls sie keine auf einer charakteristischen Fläche liegende geschlossene Kurve bilden.

nun die Newtonsche Bewegungsgleichung (VI.164) abändern. Nach einigen einfachen Rechnungen ergibt sich die autoparallele Version der Geodätengleichung zu

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\partial_\mu \mathcal{V} - \left(\hat{h}^\mu{}_\rho \hat{p}^\rho \right) \left(p_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \left(C_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\tau} \right) . \quad (\text{VI.168})$$

Der zusätzliche Term auf der rechten Seite verschwindet auf einer charakteristischen Linie und bei einer auf die charakteristischen Flächen eingeschränkten Bewegung. Aufgrund der Projektoreigenschaft von $\hat{\mathbf{h}}$ (VI.160) verletzt die Autoparallelen-Gleichung (VI.168) nicht das Energieerhaltungsgesetz (VI.166).

Ein qualitatives Bild der Autoparallelen als Lösung von (VI.168) erhalten wir wieder durch Untersuchung des durch die Tangente \mathbf{t} und dem umskalierten charakteristischen Vektor \mathbf{p} eingeschlossenen Winkels α . Da α entlang einer Autoparallelen sich nicht ändert, erhalten wir eine Konstante der Bewegung durch

$$\cos \alpha = G_{\mu\nu} \hat{p}^\mu t^\nu . \quad (\text{VI.169})$$

Wir wollen hier zweckmäßigerweise den Riemannschen Winkel α durch dessen euklidisches Analogon ersetzen

$$\begin{aligned} \cos \alpha_e &= g_{\mu\nu} \hat{p}^\mu t^\nu , \\ \left(\hat{t}^\nu &= t^\nu \frac{ds}{d\sigma} \right) . \end{aligned} \quad (\text{VI.170})$$

Damit erhalten wir

$$\cos^2 \alpha_e = \psi^2 \cos^2 \alpha \left(\sin^2 \alpha + \psi^2 \cos^2 \alpha \right)^{-1} \quad (\text{VI.171})$$

Beide Winkel sind identisch für $\alpha = 0, \pi/2$. Starten wir nun aber das Testteilchen unter einem Winkel $0 < \alpha < \pi/2$, das heißt unter abnehmendem Potential \mathcal{V} , so bewegt sich das Testteilchen auf ein Meronzentrum zu. In diesem Fall strebt α_e gegen Null was nichts anderes bedeutet, als daß sich die autoparallele Kurve schneller und direkter dem Meronzentrum nähert als die geodätische Kurve. Schießt

Kapitel VII

Die Expansion des leeren Universum

Unsere Wahl (IV.90) für eine allgemeine Energie-Impuls-Tensordichte ${}^{(e)}\mathbf{T}$ des Vakuums (bzw. für das „Gravitationsfeld“) ermöglicht es uns allgemeinere, auf dem Ansatz (IV.80.a) - (IV.80.c) beruhende Lösungen der Einsteingleichungen (IV.40) zu finden. Der interessante Punkt hierbei besteht in der Frage, ob die allgemeineren Lösungen die de Sitter Konfigurationen letztendlich approximieren, so daß man letztere bezüglich dieser Klasse von Störungen als stabil bezeichnen kann. Der korrespondierende Energie-Impuls-Tensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ der zugrundeliegenden Klasse von Störungen wurde schon in (IV.98) gefunden und der Einstein-Tensor ist durch (IV.118) gegeben, so daß die Einsteingleichungen (IV.40) das folgende gekoppelte System von Differentialgleichungen für die intrinsischen und extrinsischen Variablen φ und ϕ erzeugen

$$\frac{\dot{\mathcal{R}}^2 - \sigma}{\mathcal{R}^2} = L_p^2 \left[\left(\phi\varphi - \dot{\phi} \right)^2 + \phi^4 \right] \quad (\text{VII.1.a})$$

$$\frac{\sigma - \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} - 2 \frac{\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = L_p^2 \left[\left(\phi\varphi - \dot{\phi} \right)^2 + \phi^4 - \left(\frac{2\phi}{\epsilon} \right)^2 \right] . \quad (\text{VII.1.b})$$

$$\dot{\mathcal{R}}^2 - \sigma + \mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} = 2\frac{L_p^2}{\epsilon^2}\mathcal{S}^2 \quad (\text{VII.3.a})$$

$$\dot{\mathcal{R}}^2 - \sigma = L_p^2 \left(\dot{\mathcal{S}}^2 + \frac{\mathcal{S}^4}{\mathcal{R}^2} \right) . \quad (\text{VII.3.b})$$

Dieses Gleichungssystem läßt nun schon einige interessante Eigenschaften für das vorliegende kosmologische Modell erkennen: Für das offene Universum ($\sigma = +1$) kann der Radius \mathcal{R} des Weltalls keinen extremalen Wert ($\dot{\mathcal{R}} = 0$) annehmen. Das bedeutet, daß das Universum in diesem Fall für immer kontrahiert oder expandiert. Für $\sigma = 0$ (\rightsquigarrow Euklidische Foliation) oder $\sigma = -1$ (\rightsquigarrow geschlossenes Universum) kann dagegen eine Phase der Expansion auf eine Kontraktion folgen (oder umgekehrt). Man beachte auch, daß die Gleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) zeitumkehrinvariant sind, d.h. der zeitlich umgekehrte Ablauf ist ebenfalls eine Lösung der Gleichungen. Aus diesem Grund muß für jede expansive Lösung die korrespondierende kontraktive Lösung existieren. Diese Tatsache führt nun zu der interessanten Frage welche der beiden Lösungen stabil ist. Aufgrund der Zeitumkehrinvarianz *kann nur eine* der beiden Lösungstypen stabil sein! Hierbei bezieht sich die Stabilitätsfrage primär auf den Vakuumgrundzustand (de Sitter-Universum und dessen Euklidische Foliation) wie in Abschnitt (IV.3) beschrieben. Uns interessiert also, welche der beiden Euklidischen Foliationen des de Sitter-Universums durch die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) für $t \rightarrow +\infty$ approximiert wird.

Man beachte hier, daß der Begriff des Grundzustandes den globalen 4-Raum *und* seine Foliation einschließt. Einen anderen Foliationstyp des *gleichen* 4-Raumes sehen wir aufgrund der absoluten Bedeutung von Raum und Zeit als ein unterschiedliches Universum an, welches wir aus diesem Grund von der Stabilitätsanalyse ausschließen. Um dies an einem Beispiel aufzuzeigen, wollen wir die verschiedenen Foliationen der de Sitter-Raum-Zeit (d.h. dem Raum konstanter Krümmung) untersuchen, welche von der dynamischen (1+3)-Aufspaltung (IV.78.a), (IV.78.b) herrühren. Da der Krümmungstensor \mathbf{R} (IV.117) einen Raum konstanter Krümmung beschreibt,

muß er die Form (IV.47) annehmen. Dies ergibt die folgenden Gleichungen für den Radius \mathcal{R}

$$\varphi^2 - \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2} = \frac{1}{l^2} \quad (\text{VII.4.a})$$

$$\frac{\sigma - \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{\ddot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = 0 . \quad (\text{VII.4.b})$$

Mit Hilfe der „Hubble Relation“ (IV.81) erhalten wir für die erste Gleichung (VII.4.a):

$$\frac{\sigma - \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} + \frac{1}{l^2} = 0 . \quad (\text{VII.5})$$

Die Konsistenzforderung mit der zweiten Gleichung (VII.4.b) ergibt dann

$$\ddot{\mathcal{R}} - \frac{1}{l^2} \mathcal{R} = 0 . \quad (\text{VII.6})$$

Die allgemeine Lösung von (VII.6) läßt sich leicht finden:

$$\mathcal{R}(\theta) = \mathcal{R}_+ \exp \left[-\frac{\theta}{l} \right] + \mathcal{R}_- \exp \left[\frac{\theta}{l} \right] . \quad (\text{VII.7})$$

Setzen wir dieses Ergebnis in (VII.4.b) ein, so erhalten wir eine Bedingung für die Konstante σ

$$\sigma = \dot{\mathcal{R}}^2 - \mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} = -4 \frac{\mathcal{R}_+ \cdot \mathcal{R}_-}{l^2} . \quad (\text{VII.8})$$

Aufgrund der Argumentation nach Gleichung (IV.115) kann die Konstante σ jedoch

nur die Werte $\sigma = 0, \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1$ annehmen.

Der erste Wert ($\sigma = 0$) impliziert, daß zumindest eine der zwei Integrationskonstanten \mathcal{R}_+ , \mathcal{R}_- , welche in der allgemeinen Lösung (VII.7) enthalten sind, verschwinden müssen. Dadurch erhalten wieder die beiden ursprünglichen de Sitter Foliationen (IV.72), welche einer Euklidischen Foliation des 4-Raumes entsprechen. Wählen wir dagegen den Wert $\sigma = -1$ (geschlossenes sphärisches Universum), so müssen die zwei Amplituden \mathcal{R}_\pm positiv sein:

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_- = +\frac{l}{2} . \quad (\text{VII.9})$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erhalten wir für die entsprechende Lösung

$${}^{(-1)}\mathcal{R}(\theta) = l \cosh \frac{\theta}{l} . \quad (\text{VII.10})$$

Der Radius des Universums nimmt im Gegensatz zur ursprünglichen de Sitter Foliation ($\sigma = 0$) einen minimalen Wert an. Das offene Universum ($\sigma = +1$) ist charakterisiert durch

$$\mathcal{R}_+ = -\mathcal{R}_- = l \quad (\text{VII.11})$$

und entsteht aus einer Singularität („big bang“)

$$\begin{aligned} {}^{(+1)}\mathcal{R}(\theta) &= l \sinh \frac{\theta}{l} \\ (\theta &\geq 0) . \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

Unseres Wissens ist diese Foliation ($\sigma = +1$) in der Literatur noch nicht untersucht worden [31].

$$\left(\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right) 1)$$

Der interessante Punkt hierbei ist, daß sich beide Zeit-Funktionen $\mathcal{R}(\theta)$ (VII.10), (VII.12) vom exponentiellen Gesetz ${}^{(0)}R(\theta)$ (IV.72) nur für endliche Werte von θ unterscheiden und sich mit anwachsender Zeit θ dem Wert der Hubble-Konstanten $\frac{1}{l}$ der de Sitter-Foliation schnell annähern. Abgesehen von diesem Merkmal müssen wir uns aber vor Augen halten, daß sich die 3-Geometrien und 3-Topologien beider Lösungen für alle Zeiten θ unterscheiden! Der Grund hierfür ist, daß die Geometrie auf den charakteristischen Flächen von Hand eingeführt und für alle Zeiten konstant gehalten wird. (vgl. die Argumentation nach Gleichung (IV.115)). Dies zeigt uns die Bedeutung der $\text{SO}(3)$ -Krümmung \mathcal{F}_i (II.22) für die Dynamik der (1+3)-Aufspaltung.

Wir kommen nun zu dem wichtigsten Punkt, nämlich der Frage, ob die drei Foliationstypen die Einsteinschen Feldgleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) erfüllen. Auf den ersten Blick scheint dies nahezuliegen, da die Einsteinschen Gleichungen

nur die 4-dimensionale Raum-Zeit Geometrie, welche von der Art der Foliation unabhängig ist, *lokal* mit der Energie-Impulsdichte der Materie verbinden. Die *globale* Topologie der entsprechenden 4-Räume und 3-Räume wird jedoch nicht eindeutig fixiert! Wir erwarten deshalb nicht, daß die Einsteinschen Gleichungen eine bestimmte Topologie, die zu einer Lösung der mikroskopischen Gleichungen für die (1+3)-Aufspaltung gehört, von vornherein ausschließen. Das Gegenteil ist jedoch der Fall: Da die rechte Seite der Einsteinschen Gleichungen nicht nur die 4-Geometrie der Raum-Zeit enthält, sondern auch von deren Foliation abhängt (vgl. (II.28)), besteht die Möglichkeit, daß die eine oder andere Topologie ausgeschlossen wird. Um dies zu zeigen, setzen wir Gleichung (VII.8) in die Bewegungsgleichung (VII.3.a) ein und erhalten

$$\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} = \frac{L_p^2}{c^2} \mathcal{S}^2 . \quad (\text{VII.13})$$

Aufgrund von (VII.6) ist dies in Übereinstimmung mit der ursprünglichen Definition der Variablen \mathcal{S} (VII.2). Ferner schließen wir aus der Bewegungsgleichung (VII.3.b)

$$\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} = L_p^2 \left(\dot{\mathcal{S}}^2 + \frac{\mathcal{S}^4}{\mathcal{R}^2} \right) , \quad (\text{VII.14})$$

bzw. mit Hilfe von (VII.13)

$$\mathcal{S}^2 = c^2 \dot{\mathcal{S}}^2 + \frac{c^2}{\mathcal{R}^2} \mathcal{S}^4 . \quad (\text{VII.15})$$

Die Kombination von (VII.2) mit (VII.15) ergibt

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{1}{l^2} \mathcal{R}^2 , \quad (\text{VII.16})$$

was mit Gleichung (VII.5) nur für $\sigma = 0$ konsistent ist! Die Einsteinschen Gleichungen selektieren also die flache Foliation aus der übrigen Menge der Foliationen (sphärisch und hyperbolisch) aus. Das bedeutet, daß die Lösungen der Einsteinschen Gleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) für $\sigma \neq 0$, falls sie existieren, nicht das de Sitter-Universum als den Vakuumgrundzustand beschreiben. Aus diesem Grund müssen wir uns auf

die flache Foliation $\sigma = 0$ beschränken, wenn wir die Stabilität der expandierenden und kontrahierenden Phase untersuchen.

Im folgenden werden wir das Stabilitätsproblem für $\sigma = 0$ numerisch untersuchen, das mit dem Problem der kosmischen Zeitrichtung eng verbunden ist. Für die numerischen Rechnungen ist es nützlich, alle Größen in Einheiten der Planck-Länge L_p zu messen, d.h. wir setzen

$$t := \frac{\theta}{L_p} \quad (\text{VII.17.a})$$

$$r := \frac{\mathcal{R}}{L_p} \quad (\text{VII.17.b})$$

$$s \equiv \mathcal{S} \quad (\text{VII.17.c})$$

$$\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} := \dot{\mathcal{R}} \equiv \frac{d\mathcal{R}}{d\theta} \quad (\text{VII.17.d})$$

$$\frac{ds}{dt} \equiv \dot{s} := L_p \dot{\mathcal{S}} \equiv L_p \frac{d\mathcal{S}}{d\theta} \quad (\text{VII.17.e})$$

$$\Lambda_p := 2 \frac{L_p}{\rho} . \quad (\text{VII.17.f})$$

Damit vereinfachen sich die Gleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) zu

$$\ddot{r} = \frac{\sigma - \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \Lambda_p^2 s^2}{r} \quad (\text{VII.18.a})$$

$$\dot{r}^2 = \sigma + \dot{s}^2 + \frac{s^4}{r^2} . \quad (\text{VII.18.b})$$

Dieses Gleichungssystem vereinfacht sich für die flache Foliation zu

$$\ddot{r} = \frac{\frac{1}{2} \Lambda_p^2 s^2 - \dot{r}^2}{r} \quad (\text{VII.19.a})$$

$$\dot{r}^2 = \dot{s}^2 + \frac{s^4}{r^2} . \quad (\text{VII.19.b})$$

Wir wollen uns natürlich davon überzeugen, daß der Vakuumgrundzustand von Abschnitt (IV.3) wirklich eine Lösung von (VII.19.a) und (VII.19.b) ist. Dieser

Grundzustand sieht bei Verwendung der oben eingeführten Größen folgendermaßen aus:

$$r \rightarrow r_*(t) = \rho_* \exp \left[\frac{t}{\tau_*} \right] \quad (\text{VII.20.a})$$

$$s \rightarrow s_*(t) = \zeta_* \exp \left[\frac{t}{\tau_*} \right] . \quad (\text{VII.20.b})$$

Drücken wir die Konstanten τ_* und Λ_p mit Hilfe der Längenparameter $\{l, L, L_p\}$ aus, so ergibt sich

$$\tau_* = -\frac{l}{L_p} \quad (\text{VII.21.a})$$

$$\Lambda_p = \frac{2L}{l} . \quad (\text{VII.21.b})$$

Setzen wir nun die Konfiguration (VII.20.a), (VII.20.b) in die Bewegungsgleichung (VII.19.a), (VII.19.b) ein, so ergibt sich eine Lösung, falls (i) zwischen der Zeitkonstanten τ_* und dem Längenparameter Λ_p die folgende Beziehung herrscht

$$\tau_*^2 = \frac{4}{\Lambda_p^2} \left(1 + \frac{4}{\Lambda_p^2} \right) \quad (\text{VII.22})$$

und (ii), falls das Verhältnis der Amplituden folgenden Wert annimmt:

$$\left(\frac{\rho_*}{\zeta_*} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{\Lambda_p} \right)^2 . \quad (\text{VII.23})$$

Aufgrund der Gleichung (IV.70) ist die Beziehung (VII.22) konsistent mit (VII.21.a), (VII.21.b). Falls das de Sitter-Universum durch die Euklidische Foliation aufgebaut wird, genügt es also in der Tat den Vakuum-Bewegungsgleichungen (VII.3.a), (VII.3.b) und kann wegen seiner hohen Symmetrie als Vakuum-Grundzustand betrachtet werden!

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns nun unserer ursprünglichen Absicht zuwenden, die Stabilität der expansiven ($\tau_* > 0$) und kontraktiven ($\tau_* < 0$) Phase

des Grundzustandes zu untersuchen. Dazu benutzen wir in (VII.19.a), (VII.19.b) einen linearisierenden Ansatz

$$r(t) = r_*(t) + \tilde{r}(t) \quad (\text{VII.24.a})$$

$$s(t) = s_*(t) + \tilde{s}(t) \quad (\text{VII.24.b})$$

und erhalten

$$\tau_* \dot{\tilde{r}} - \frac{\zeta_*}{\rho_*} \tau_* \dot{\tilde{s}} + \left(\frac{4}{\tau_* \Lambda_p^2} \right)^2 \tilde{r} - \frac{8}{\Lambda_p^2} \frac{\zeta_*}{\rho_*} \tilde{s} = 0 \quad (\text{VII.25.a})$$

$$\ddot{\tilde{r}} + \frac{2}{\tau_*} \dot{\tilde{r}} + \frac{1}{\tau_*^2} \tilde{r} = \frac{\zeta_*}{\rho_*} \Lambda_p^2 \tilde{s} . \quad (\text{VII.25.b})$$

Um einen qualitativen Überblick über den Unterschied im Stabilitätsverhalten der zwei Grundzustands-Konfigurationen zu erhalten, bringen wir (VII.25.b) in eine Form wie sie bei der Beschreibung eines gedämpften harmonischen Oszillators unter dem Einfluß einer äußeren Kraft auftritt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\tilde{r}}^2 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{r}^2}{\tau_*^2} \right) = -\frac{2}{\tau_*} \dot{\tilde{r}}^2 + \frac{\zeta_*}{\rho_*} \Lambda_p^2 \tilde{s} \dot{\tilde{r}} . \quad (\text{VII.26})$$

Für $\tau_* > 0$ (expandierendes Universum) ist der Energieverlust durch Reibung positiv und die Störung $\tilde{r}(t)$ der de Sitter-Konfiguration wird für $t \rightarrow \infty$ verschwinden (vorausgesetzt die Arbeit, welche die äußere Kraft verrichtet, kompensiert nicht den Energieverlust). Der expandierende Grundzustand scheint deshalb stabil zu sein, wogegen die kontrahierende Phase ($\tau_* < 0$) sich als instabil erweist.

Um diese Vermutung genauer zu untersuchen machen wir für \tilde{r} und \tilde{s} einen Exponential-Ansatz

$$\tilde{r}(t) = \tilde{\rho} \exp \left[\frac{t}{\tilde{\tau}} \right] \quad (\text{VII.27.a})$$

$$\tilde{s}(t) = \tilde{\zeta} \exp \left[\frac{t}{\tilde{\tau}} \right] . \quad (\text{VII.27.b})$$

Damit ergibt sich für die Amplituden $\tilde{\rho}$ und $\tilde{\zeta}$ das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\left[\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} + \left(\frac{4}{\tau_* \Lambda_p^2} \right)^2 \right] \tilde{\rho} - \frac{\zeta_*}{\rho_*} \left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} + \frac{8}{\Lambda_p^2} \right) \tilde{\zeta} = 0 \quad (\text{VII.28.a})$$

$$\left[1 + 2 \frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} + \left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} \right)^2 \right] \tilde{\rho} - \frac{\zeta_*}{\rho_*} (\tau_* \Lambda_p)^2 \tilde{\zeta} = 0 . \quad (\text{VII.28.b})$$

Der Dämpfungs-Parameter $\tilde{\tau}$ der kleinen Abweichungen $\{\tilde{\tau}, \tilde{s}\}$ (VII.27.a), (VII.27.b) ergibt sich wie gewöhnlich aus der Forderung einer verschwindenden Koeffizienten-Determinante für (VII.28.a), (VII.28.b), d.h.

$$\left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} \right)^3 + \left(2 + \frac{8}{\Lambda_p^2} \right) \left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} \right)^2 - 3 \frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} - \frac{8}{\Lambda_p^2} = 0 . \quad (\text{VII.29})$$

Die *exakten* Wurzeln dieser Gleichung dritten Grades sind

$$\left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} \right)_1 = 1 \quad (\text{VII.30.a})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_*}{\tilde{\tau}} \right)_{2,3} &= -\frac{1}{2} \left(3 + \frac{8}{\Lambda_p^2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(3 + \frac{8}{\Lambda_p^2} \right)^2 - \frac{32}{\Lambda_p^2}} \\ &= -1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 + (2\tau_*)^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{9 + (2\tau_*)^2} . \end{aligned} \quad (\text{VII.30.b})$$

Aus dem Ansatz (VII.27.a), (VII.27.b) ersehen wir, daß die beiden negativen Wurzeln (VII.30.b) die *Stabilität* des *expandierenden* ($\tau_* > 0$) und die *Instabilität* des *kontrahierenden* Grundzustandes ($\tau_* < 0$) implizieren. Die Wurzel (VII.30.a) dagegen bedeutet, daß die *expandierende und kontrahierende* Phase stabil ist, da die Störungen (VII.27.a), (VII.27.b) das gleiche zeitliche Verhalten aufweisen wie der ungestörte Grundzustand (VII.20.a), (VII.20.b). Aus diesem Grund bewirken die Störungen mit der Amplitude (VII.30.a) nur eine Änderung der Grundzustandsamplituden

ρ_*, ζ_* . Diese Tatsache erkennt man auch, wenn man das Verhältnis dieser Störungsmplituden aus dem linearen Gleichungssystem (VII.28.a), (VII.28.b) berechnet:

$$\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\zeta}} = \left(1 + \frac{4}{\Lambda_p^2}\right) \frac{\zeta_*}{\rho_*} \quad (\text{VII.31})$$

bzw. mit Hilfe von (VII.23)

$$\left| \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\zeta}} \right| = \left| \frac{\tilde{\rho}_*}{\tilde{\zeta}_*} \right|. \quad (\text{VII.32})$$

Solch eine Beziehung für kleine Abweichungen $\tilde{\rho}, \tilde{\zeta}$ benötigen wir aufgrund der Konstanz des Verhältnisses von ρ_* zu ζ_* wie in Gleichung (VII.23) aufgeführt.

Das Ergebnis unserer linearen Stabilitätsanalyse besteht also darin, daß der expandierende Grundzustand stabil ist, während der kontrahierende sich als instabil erweist. Diese Effekte können wir anhand der numerischen Integration (Fig.VII.1) der ursprünglichen Bewegungsgleichungen (VII.19.a), (VII.19.b) deutlich erkennen.

(Fig.VII.1) zeigt die zeitliche Entwicklung des Radius des Universums, wenn die de Sitter-Werte für den Radius \mathcal{R} (nicht jedoch für \mathcal{S}) als Anfangsbedingungen genommen werden. Das Universum weicht dann von der de Sitter-Entwicklung ab, kehrt aber bald wieder zu ihr zurück und entwickelt sich dann de Sitter gemäß. Integriert man jedoch in die Vergangenheit (für die zeitlich gespiegelte Lösung ist dies die Zukunft), so endet die Entwicklung des Universums nach einigen Planck-Zeiten. Es gibt dabei zwei Arten von Singularitäten, welche die rückwärtige Entwicklung beenden: (i) der Radius des Universums geht gegen Null (wie in der Einsteinschen Theorie) und (ii) \dot{s}^2 wird bei endlichem Radius r negativ. Diese Art von Singularität taucht in der Einsteinschen Theorie nicht auf und zeigt einen Zusammenbruch der klassischen Theorie schon bei einer endlichen Ausdehnung des Universums. Auf jeden Fall „lebt“ das kontrahierende Universum nicht länger als ein paar Planck-Zeiten. Aus diesem Grund ist die „positive“ Zeitrichtung durch die anhaltende Expansion des Universums bevorzugt! Als nächstes müßte man untersuchen, wie dieses Ergebnis durch die Gegenwart von Materie ($^{(m)}\mathbf{T} \neq 0$) in

Gleichung (II.28) modifiziert wird.

Wir wollen nun am Schluß noch einige Bemerkungen über das wirkliche Universum machen. Falls die strenge de Sitter-Konfiguration (IV.71) in der Natur realisiert ist, trägt die beobachtbare Hubble-Konstante H (IV.65) einen Wert von ungefähr $10^{-56} \frac{1}{cm^2}$ zur kosmologischen Konstanten λ_c in den Einstein-Gleichungen (IV.1) bei:

$$E_{\mu\nu} + \lambda_c G_{\mu\nu} = 0 . \quad (VII.33)$$

Solch ein kleiner Wert läßt sich gegenwärtig experimentell nicht feststellen. Um zum Beispiel einen zusätzlichen Effekt in der Merkur-Periheldrehung in der Größenordnung von einer Bogensekunde pro Jahrhundert hervorzubringen (dies würde experimentell feststellbar sein [32]), müßte die kosmologische Konstante λ_c einen Wert von ungefähr $10^{-42} \frac{1}{cm^2}$ besitzen. Vergleichen wir dies mit dem obigen Wert von λ_c , so scheint jeglicher Versuch einer experimentellen Verifikation sinnlos zu sein.

Die Untersuchungen in dieser Arbeit zeigen jedoch eine weitere alternative Sicht dieses Problems. Wie wir aus Fig.IV.1 ersehen, benötigt das Universum eine gewisse Zeit, um die strenge de Sitter-Konfiguration zu erreichen. Die entsprechende Relaxationszeit $\tilde{\tau}$ wird durch die zweite und dritte Wurzel von Gleichung (VII.30.b) angegeben. Für eine grobe Abschätzung dieser Werte benützen wir Gleichung (V.92) für L . Damit erhalten wir für die dimensionslose Konstante Λ_p in (VII.21.b) einen Wert von 10^{-30} . Aufgrund dieser kleinen Größe liegt die eine Wurzel $\tilde{\tau}$ in der Größenordnung der Planck-Zeit $T_p \approx 10^{-42}$ sec und die andere in der Größenordnung der Hubble-Zeit $T_H \approx 10^{10}$ Jahre . Da die letztere Zeitskala in der Größenordnung des Alters des Weltalls liegt, scheint uns die Annahme realistisch, daß das Universum die de Sitter-Konfiguration gegenwärtig noch nicht erreicht hat. Aus diesem Grund muß die beobachtbare Hubble-Rate φ (IV.81) nicht unbedingt mit dem de Sitter-Gleichgewichtswert l (IV.99.b) übereinstimmen. Diese Tatsache

sollte aber genügen, um die modifizierten Einstein-Gleichungen (II.28) anstelle von (IV.1) zur Beschreibung des realen Universums zu benutzen, da der Vakuum-Tensor ${}^{(e)}\mathbf{T}$ des gegenwärtigen Universums noch nicht seine Grundzustandsform (proportional zu \mathbf{G}) erreicht hat. Zukünftige Untersuchungen werden zeigen ob dies in unserem Sonnensystem zu experimentell beobachtbaren Effekten führt.¹

¹Dies führte nach Beendigung der vorliegenden Arbeit zu einer Reihe weiterer Veröffentlichungen, siehe [36, 37, 38]

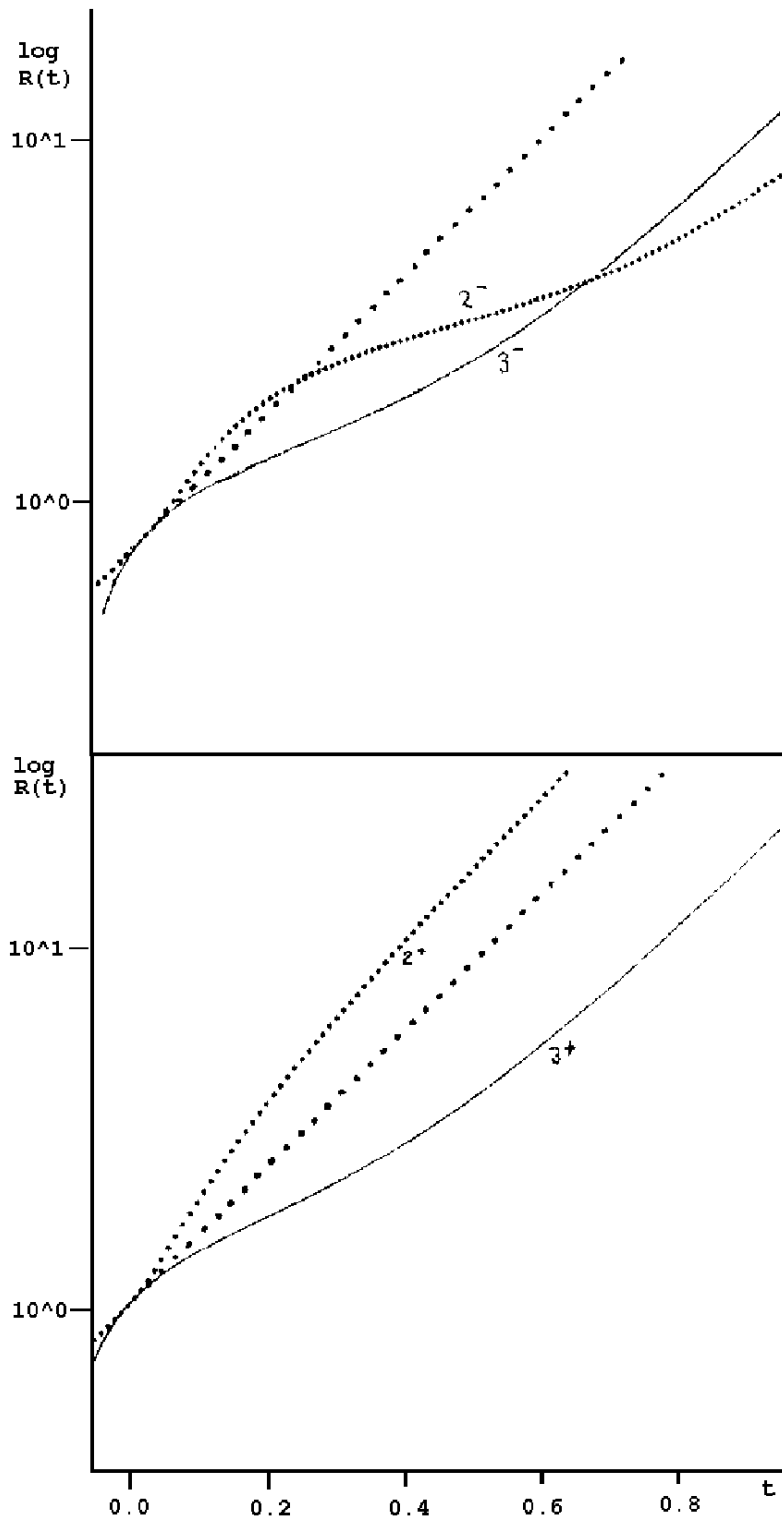


Abbildung VII.1: Der Radius $\mathcal{R}(t)$ des deSitter Universums für $\sigma = 0$

Die de Sitter-Lösung (VII.20.a) erscheint hier als Gerade (gepunktelt). Alle gefundenen Lösungen sind stabil, d.h. sie beschreiben für $t \rightarrow \infty$ ein de Sitter-Universum, was sich an der asymptotischen Parallelität zur de Sitter-Geraden ablesen läßt. Als Anfangswerte wurden für den Radius $\mathcal{R}(0)$ und seine Zeitableitung $\dot{\mathcal{R}}(0)$ die de Sitter-Werte zugrundegelegt, während die Anfangswerte für die Variable \mathcal{S} „verstimmt“ wurden; und zwar wurde für die Lösungen (2^+) und (2^-) der Anfangswert $\mathcal{S}(0)$ über dem de Sitter-Wert \mathcal{S}_* hinaus erhöht, während für die Lösungen (3^+) und (3^-) $\mathcal{S}(0)$ gegenüber $\mathcal{S}_*(0)$ abgesenkt wurde. Die Indizes $+$ für die einzelnen Lösungen beziehen sich auf die Wahl des relativen Vorzeichens von $\mathcal{S}(0)$ und $\dot{\mathcal{S}}(0)$. Offensichtlich bedeutet eine *Erhöhung* (*Erniedrigung*) von $|\mathcal{S}(0)|$, daß die zugehörige Lösung zunächst *über* (*unter*) der de Sitter-Konfiguration liegt, während das relative Vorzeichen darüber entscheidet, welche Größenverhältnisse sich im asymptotischen Bereich ($t \rightarrow \infty$) einstellen.

Glossar

\otimes	Tensorprodukt
\circ	Verknüpfung
\bullet	Überschiebung
Sp	Spurbildung
$\mathbf{A} = \{A_{i\mu}\}$	Konnexion in $\tilde{\tau}_4$
$\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{A}_{i\mu}\}$	Konnexion in $\bar{\tau}_4$
$[\bar{B}]$	Abbildung $\overset{\cap}{\tau}_4 \rightarrow \bar{\tau}_4$
$[\overset{\cap}{B}]$	Abbildung $\bar{\tau}_4 \rightarrow \overset{\cap}{\tau}_4$
$[\tilde{B}]$	Abbildung $\check{\tau} \rightarrow \tilde{\tau}_4$
$[\check{\bar{B}}]$	Abbildung $\tilde{\tau}_4 \rightarrow \check{\tau}$
$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{i\mu}\}$	Soldering-Form der Bündel $\bar{\tau}_4$ und $\tilde{\tau}_4$
\mathbf{B}	reskaliertes \mathcal{B}
$\mathbf{C} = \{C_{i\mu}\}$	dynamischer Teil von \mathbf{A}
$\mathbf{C} = \{C_\mu\}$	Gradientenvektor, $C_\mu = \partial_\mu C$
$\mathbf{D} = \{D_\mu\}$	eichkovariante Ableitung in $\tilde{\tau}_4$
$\bar{\mathbf{D}} = \{\bar{D}_\mu\}$	eichkovariante Ableitung in $\bar{\tau}_4$
$\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_\mu\}$	allgemein-kovariante Ableitung bzgl. $\mathbf{\Gamma}$ und \mathbf{A} .
$\overset{\cap}{\mathcal{D}} = \{\overset{\cap}{\mathcal{D}}_\mu\}$	allgemein-kovariante Ableitung bzgl. $\overset{\cap}{\mathbf{\Gamma}}$ und $\bar{\mathbf{A}}$.
$\bar{\mathcal{D}} = \{\bar{\mathcal{D}}_\mu\}$	allgemein-kovariante Ableitung bzgl. $\mathbf{\Gamma}$ und $\bar{\mathbf{A}}$

$\check{\mathcal{D}} = \{\check{\mathcal{D}}_\mu\}$ allgemein-kovariante Ableitung bzgl. $\check{\bar{\Gamma}}$ und \mathbf{A}
$\mathbf{E} = \{E_{\mu\nu}\}$ Einstein-Tensor
\mathcal{E} spezielles Bezugssystem
\mathcal{E} Energiedichte
$\mathbf{F} = \{F_{i\mu\nu}\}$ SO(3) Krümmung von \mathbf{A}
$\bar{\mathbf{F}} = \{\bar{F}_{i\mu\nu}\}$ SO(3) Krümmung von $\bar{\mathbf{A}}$
$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_{i\mu\nu}\}$ SO(3) Eichensor
$\mathbf{G} = \{G_{\mu\nu}\}$ Riemannsche Metrik
$\bar{\mathbf{G}} = \{\bar{G}_{\mu\nu}\}$ konformal flache Metrik
$\mathring{\mathbf{G}} = \{\mathring{G}_{\mu\nu}\}$ charakteristische Metrik für $\mathbf{H} = 0$
G Determinante von \mathbf{G}
$\mathring{\mathbf{G}} = \{G_{\mu\nu}\}$ Fasermetric von $\mathring{\tau}_4$
$\mathbf{H} = \{H_{\mu\nu}\}$ Hubble-Tensor
H Hubble-Konstante
$\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_{i\mu\nu}\}$ SO(3) Eichensor
$\mathbf{M}_4, \mathbf{E}_4$ Minkowski- bzw. Euklidischer Raum
$\mathbf{K} = \{K^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ Kontorsion
$\mathring{\mathbf{K}} = \{\mathring{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ charakteristische Kontorsion
$^{(\perp)}\mathring{\mathbf{K}} = \{^{(\perp)}\mathring{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ orthogonaler Anteil der charakteristischen Kontorsion
$^{(\parallel)}\mathring{\mathbf{K}} = \{^{(\parallel)}\mathring{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ paralleler Anteil der charakteristischen Kontorsion
$\overset{\cup}{\mathbf{K}} = \{\overset{\cup}{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ relative Kontorsion von $\check{\bar{\Gamma}}$ bzgl. $\mathring{\bar{\Gamma}}$
$\check{\mathbf{K}} = \{\check{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ totale Kontorsion
$\mathring{\mathbf{K}} = \{\mathring{K}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ charakteristische Kontorsion für $\mathbf{H} = 0$
L_P Planck-Länge
L, \mathcal{L} Längenparameter
L^i $\mathcal{SO}(3)$ -Generator
$^{(\text{ex})}\mathbf{M}, ^{(\text{in})}\mathbf{M}$ äußere bzw. innere Variable

\mathcal{M}	Energiedichte
\mathcal{P}	Druck
$^{(W)}\mathcal{M}$	Energiedichte des \mathbf{W} -Feldes
$^{(W)}\mathcal{P}$	Druck des \mathbf{W} -Feldes
$^{(F)}\mathcal{M}$	Energiedichte des Eichfeldes
$^{(F)}\mathcal{P}$	Druck des Eichfeldes
$\hat{\mathbf{P}} = \{\hat{P}_{\mu\nu}\}$	Projektor auf $\bar{\Delta}$
$\overset{\cap}{\mathbf{P}}$	Projektionsoperator auf $\overset{\cap}{\Delta}$
$\mathbf{Q} = \{Q_{\mu\nu\lambda}\}$	Nichtmetrizitätstensor
$\bar{\mathbf{Q}} = \{\bar{Q}_{\mu\nu\lambda}\}$	Abweichung $\bar{\Gamma}^*$ von $\bar{\Gamma}$
$\mathbf{R} = \{R_{\mu\nu\lambda\sigma}\}$	Krümmung von Γ
$\bar{\mathbf{R}} = \{\bar{R}_{\mu\nu\lambda\sigma}\}$	charakteristische Krümmung ($\mathbf{H} = 0$)
$\mathcal{R} = \{\mathcal{R}^\mu{}_\nu\} \equiv \{R^\mu{}_\nu\}$	Ricci-Tensor
R bzw. \mathcal{S}	Krümmungsskalar
$\parallel\mathbf{R} = \{\parallel R_{\mu\nu\lambda\sigma}\}$	paralleler Teil von \mathbf{R}
$^\perp\mathbf{R} = \{^\perp R_{\mu\nu\lambda\sigma}\}$	orthogonaler Teil von \mathbf{R}
$\overset{\cap}{\mathbf{R}} = \{\overset{\cap}{R}_{\mu\nu\lambda\sigma}\}$	charakteristische Krümmung (bzgl. $\overset{\cap}{\Gamma}$)
$\mathbf{S} = \{S^i{}_j\}$	Element aus $\text{SO}(3)$
$\mathbf{S} = \{S_\mu\}, \{S_{\mu\nu}\}, \{S_{\mu\nu\lambda}\}$	Hilfsgrößen aus $\overset{\cap}{\tau}_4$
$\bar{\mathbf{S}}$	konformal flache \mathbf{S}
$\mathbf{T} = \{T_{\mu\nu}\}$	gesamter Energie-Impulstensor
$\mathbf{T} = \{T_{\mu\nu\lambda}\}$	Tensor
\mathcal{T}	kinetische Energie eines Testteilchens
$\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$	metrischer Energie-Impulstensor
$^{(0)}\mathbf{T} = \{^{(0)}T_{\mu\nu}\}$	Energie-Impulstensor des Vakuums
$^{(\mathbf{B})}\mathbf{T} = \{^{(\mathbf{B})}T_{\mu\nu}\}$	kanonischer Energie-Impulstensor des \mathbf{B} Feldes
$^{(\text{e})}\mathbf{T} = \{^{(\text{e})}T_{\mu\nu}\}$	Energie-Impulstensor von $^{(\text{ex})}\mathbf{M}$

${}^{(\mathbf{F})}\mathbf{T} = \{{}^{(\mathbf{F})}T_{\mu\nu}\}$	kanonischer Energie-Impulstensor des Eichfeldes
${}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T} = \{{}^{(\mathbf{F})}\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$	metrischer Energie-Impulstensor des Eichfeldes
${}^{(\mathbf{B})}\mathcal{T} = \{{}^{(\mathbf{B})}\mathcal{T}_{\mu\nu}\}$	metrischer Energie-Impulstensor des \mathbf{B} Feldes
${}^{(\text{id})}\mathbf{T} = \{{}^{(\text{id})}T_{\mu\nu}\}$	Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit
${}^{(\text{m})}\mathbf{T} = \{{}^{(\text{m})}T_{\mu\nu}\}$	Energie-Impulstensor der Materie
${}^{(\mathbf{W})}\mathbf{T} = \{{}^{(\mathbf{W})}T_{\mu\nu}\}$	kanonischer Energie-Impulstensor des \mathbf{W} Feldes
$\mathbf{U} = \{U_\mu\}$	Tangentenvektor
$\mathbf{V} = \{V_\lambda\}$	Schnitt in $\overset{\cap}{\tau}_4$
\mathcal{V}	Potential
$\mathbf{W} = \{W_\lambda\}$	Kompensationsfeld
$\mathbf{W} = \{W_{\mu\nu\rho\lambda}\}$	Weylscher-Tensor
$\mathbf{Z} = \{Z^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	Torsion
$\overset{\cap}{\mathbf{Z}} = \{\overset{\cap}{Z}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	charakteristische Torsion
${}^{(\perp)}\overset{\cap}{\mathbf{Z}} = \{{}^{(\perp)}\overset{\cap}{Z}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	orthogonaler Anteil der charakteristischen Torsion
${}^{(\parallel)}\overset{\cap}{\mathbf{Z}} = \{{}^{(\parallel)}\overset{\cap}{Z}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	paralleler Anteil der charakteristischen Torsion
$\overset{\cup}{\mathbf{Z}} = \{\overset{\cup}{Z}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	relative Torsion
$\overset{\sim}{\mathbf{Z}} = \{\tilde{Z}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$	totale Torsion
ϵ	Konstante
$\hat{\mathbf{e}} = \{\hat{n}_\mu, \hat{e}_i{}^\mu\}$	Vierbein, welches $\overline{\Delta}$ aufspannt
$\mathbf{f} = \{f_\mu\}$	Frobeniusvektor
f_{\parallel}, f_{\perp}	Parameter
$\mathbf{g} = \text{diag}(\overset{+}{-} 1, -1, -1, -1)$	Minkowski bzw. Euklidische Metrik
$\mathbf{g} = \{g_{ij}\}$	Fasermetrik von $\overline{\tau}_4$
$\mathbf{h} = \{h_{\mu\nu}\}$	reduzierter Hubble-Tensor
$\hat{\mathbf{h}} = \{\hat{h}_{\mu\nu}\}$	Projektor senkrecht zur Vierergeschwindigkeit

$\mathbf{h}^+ = \{h_{\mu\nu}^+\}$symmetrischer Teil von \mathbf{h}
$\mathbf{h}^- = \{h_{\mu\nu}^-\}$antisymmetrischer Teil von \mathbf{h}
$\mathbf{k} = \{k_{\mu\nu}\}$symmetrisches $\overset{\cap}{\tau}_4$ -Objekt
$\mathbf{l} = \{l_\mu\}$Schnitt aus $\overset{\cap}{\tau}_4$
\mathbf{m}Gravonmasse
\mathbf{l}Längenparameter
l^i $\mathcal{SO}(1,3)$ bzw. $\mathcal{SO}(4)$ Boost-Generator
$\mathbf{p} = \{p_\mu\}$charakteristisches Vektorfeld, normal zu $\overset{\cap}{\Delta}$
$\hat{\mathbf{p}} =$normiertes char. Vektorfeld über \mathbf{E}_4
$^*\mathbf{p} = \{^*p_{\mu\nu\lambda}\}$Poincaré-Dual von \mathbf{p}
\mathbf{s}Abweichung $\bar{\mathbf{S}}$ von \mathbf{S}
$\mathbf{t} = \{t_{\mu\nu}\}$totaler Korrekturterm
$^{(\mathbf{B})}\mathbf{t} = \{^{(\mathbf{B})}t_{\mu\nu}\}$Korrekturterm des \mathbf{B} -Feldes
$^{(\mathbf{W})}\mathbf{t} = \{^{(\mathbf{W})}t_{\mu\nu}\}$Korrekturterm des \mathbf{W} -Feldes
$\mathbf{u} = \{u_i\}$ $\mathrm{SO}(3)$ -Vektoranteil von \mathbf{U}
\mathbf{u} $\mathrm{SO}(3)$ -Skalaranteil von \mathbf{U}
$\mathbf{w} = \{w_\mu\}$Schnitt von $\overset{\cap}{\tau}_4$
$\overset{\cap}{\Delta}$charakteristische Distribution
$\overline{\Delta}$repräsentative Distribution
$\Gamma = \{\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ $\mathcal{GL}(4, \mathbf{R})$ Konnexion
$\bar{\Gamma} = \{\bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$Levi-Civita Konnexion von $\bar{\mathbf{G}}$
$\overset{\circ}{\Gamma} = \{\overset{\circ}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$kanonisch flache Konnexion
$\overset{*}{\Gamma} = \{\overset{*}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$charakteristische Konnexion ($\mathbf{H} = 0$)
$\overset{\cap}{\Gamma} = \{\overset{\cap}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$charakteristische Konnexion
$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$Levi-Civita Konnexion bzgl. \mathbf{G}
$\overset{\sim}{\Gamma} = \{\overset{\sim}{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}\}$Konnexion in $\overset{\sim}{\tau}$

$\Lambda = \{\Lambda^\mu{}_\nu\}$ Element aus $\text{SO}(1,3)$
Λ totale Lagrangedichte
Λ_B Lagrangedichte von \mathbf{B}
Λ_F Lagrangedichte von \mathbf{F}
Λ_W Lagrangedichte von \mathbf{W}
$\nabla = \{\nabla_\mu\}$ koordinaten-kovariante Ableitung bzgl. Γ
$\overset{\circ}{\nabla} = \{\overset{\circ}{\nabla}_\mu\}$ charakteristische Ableitung
$(\perp)\overset{\circ}{\nabla} = \{(\perp)\overset{\circ}{\nabla}_\mu\}$ orthogonaler Teil der charakteristischen Ableitung
$(\parallel)\overset{\circ}{\nabla} = \{(\parallel)\overset{\circ}{\nabla}_\mu\}$ paralleler Teil der charakteristischen Ableitung
$\tilde{\nabla} = \{\tilde{\nabla}_\mu\}$ koordinaten-kovariante Ableitung in $\tilde{\tau}$
$\Omega = \{\Omega_{\mu\nu}\}$ Krümmung von ω
$\overset{\circ}{\Omega} = \{\overset{\circ}{\Omega}_{\mu\nu}\}$ $\overset{\circ}{\lambda}_4$ Bündelkrümmung
Φ Hilfsfunktion
$\Sigma = \{\Sigma^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ totale Spindichte
$(\mathcal{B})\Sigma, {}^{(\mathcal{B})}\Sigma = \{(\mathcal{B})\Sigma_{\mu\nu\lambda}\}, \{(\mathcal{B})\Sigma_{\mu\nu\lambda}\}$ Spindichte des \mathcal{B} -Feldes bzw. \mathbf{B} -Feldes
$(p)\Sigma = \{(p)\Sigma^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ Spindichte des \mathbf{p} -Feldes
$(\mathbf{W})\Sigma = \{\Sigma^\mu{}_{\nu\lambda}\}$ Spindichte des \mathbf{W} -Feldes
$\Sigma' = \{\Sigma'_{\mu\nu\lambda}\}$ symmetrischer Teil von $\bar{\mathbf{Q}}$
α Winkel zwischen den Geodäten und den charakteristischen Linien
α_e Euklidisches Analogon von α
$\gamma = \gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ wesentlicher Teil von Γ
$\overset{\circ}{\lambda}_4$ Triviales Prinzipalbündel mit \mathbf{M}_4 , bzw. \mathbf{E}_4 als Basisraum
$\nu = \{\nu_i\}$ Schnitt von $\bar{\tau}_4$
$\overset{\circ}{\omega} = \{\overset{\circ}{\omega}_{\mu\nu\lambda}\}$ flache Konnexion in $\overset{\circ}{\lambda}_4$
$\{\wp_{\mu\nu}\}, \{\wp_\mu\}$ Hilfsgrößen
$\partial = \{\partial_\mu\}$ partielle Ableitung

ψ integrierender Faktor für p
σ Eigenzeit
τ Newtonsche Zeit
τ_4 Tangentialbündel der Raum-Zeit
$\tilde{\tau}_4, \tilde{\tilde{\tau}}_4$ isomorphe Bündel
$\overset{\circ}{\tau}_4$ triviales Tangentialbündel der flachen Raum-Zeit
$\overset{\cap}{\tau}_4$ charakteristisches Bündel
$\overline{\tau}_4$ repräsentatives Bündel
θ Universalzeit

Anhang A

Nachbemerkung

Die Wahl (III.40) für die innere Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ ist nicht so speziell wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheinen könnte. Man kann nämlich zeigen (vgl. (IV.116.a), (IV.116.b)), daß der obige Spezialfall (III.40) nur einen ($\sigma = 0$) von drei möglichen Fällen ($\sigma = 1, 0, -1$) der charakteristischen Untergeometrie darstellt. Die charakteristischen Flächen tragen in jedem Fall eine Geometrie konstanter Krümmung (offen, geschlossen oder flach).

Das Ergebnis (IV.116.a), (IV.116.b) ist allgemeingültig wenn man auf der linken Seite statt der gesamten $SO(3)$ -Krümmung $\bar{\mathbf{F}}$ bzw. statt des gesamten charakteristischen Krümmungstensor $\bar{\mathbf{R}}$ nur deren Einschränkungen $\bar{\mathbf{F}}|_{\bar{\Delta}}$ und $\bar{\mathbf{R}}|_{\bar{\Delta}}$ auf die charakteristischen Flächen verwendet, d.h es gilt stets

$$\bar{F}_{i\rho\sigma}\mathcal{B}^\rho{}_\mu\mathcal{B}^\sigma{}_\nu = \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2(\theta)}\epsilon_i{}^{jk}\mathcal{B}_{j\mu}\mathcal{B}_{k\nu} \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{R}_{\mu\sigma\alpha\beta}\mathcal{B}^\alpha{}_\nu\mathcal{B}^\beta{}_\lambda = \frac{\sigma}{\mathcal{R}^2(\theta)}[\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}_{\sigma\lambda} - \mathcal{B}_{\mu\lambda}\mathcal{B}_{\sigma\nu}] \quad (\text{A.2})$$

Demzufolge tragen also die charakteristischen Flächen stets eine innere 3-Geometrie konstanter Krümmung, *unabhängig von der Symmetrie der Massenverteilung im Universum*. Dieser Sachverhalt könnte eine Erklärung dafür abgeben, warum die 3-Geometrie des Weltalls auf kosmischer Skala so extrem homogen und isotrop

erscheint, obwohl jüngste experimentelle Beobachtungen auf eine ziemlich starke Inhomogenität der Massenverteilung hinweisen (kosmische Leerräume \rightsquigarrow „Hubble bubbles“ [35]). Übrigens wurde dieser Sachverhalt für den Spezialfall der Einbettung der charakteristischen 3-Flächen in einen Euklidischen 4-Raum schon in einer früheren Arbeit nachgewiesen [34].

Literaturverzeichnis

- [1] S.Hawking „*Eine kurze Geschichte der Zeit*“, Rowohlt 1987
- [2] J.Schwinger „*Einsteins Erbe*“ Spektrum-Verlag, 1987
- [3] H.Fritsch „*Eine Formel verändert die Welt*“, Piper 1988
- [4] B.Hoffmann „*Einsteins Ideen*“, Spektrum-Verlag, 1988
- [5] C.M.Will „... und Einstein hatte doch recht.“ Springer, 1989
- [6] R.Kippenhahn „*Licht vom Rande der Welt*“, Piper, 1988
- [7] J.D.Barrow, J.Silk „*Die asymmetrische Schöpfung*“ Piper, 1986
- [8] R. Brucker, „*Geometrische Interpretation von $SU(2)$ -Yang-Mills-Feldern*“, Dissertation, Universität Stuttgart 1988
- [9] T.Heck, „*Die charakteristische Distribution bei trivialisierbaren Eichfeldern*“, Diplomarbeit, Universität Stuttgart 1989
- [10] M.Mattes, „*Innere Geometrie und Topologie der magnetischen Monopol Lösungen in der $SO(3)$ Yang-Mills-Higgs Theorie*“, Diplomarbeit, Universität Stuttgart 1985
- [11] R. Brucker und M. Sorg, Z. Naturforsch. **41a**, 571 (1986)

- [12] R. Brucker und M. Sorg, Z. Naturforsch. **42a**, 521 (1987)
- [13] F.W.Hehl et al., Rev.Mod.Phys. **48**, 393 (1976)
- [14] F.W.Hehl, Rep.Math.Phys. **9**, 55 (1976)
- [15] S.Kobayashi und N.Nomizou, „*Foundation of Differential Geometry*“, Vol.1 und Vol.2 Interscience Publishers, 1969
- [16] Y. Choquet-Bruhat et al., „*Analysis, Manifolds and Physics*“, North-Holland, 1982
- [17] R.Sexl und H.K.Urbantke, „*Gravitation und Kosmologie*“, Bi-Wissenschaftsverlag, 1983
- [18] B.Chen, „*Geometry of Submanifolds*“, Marcel-Dekker, Inc., New York 1973
- [19] C.von Westenholz, „*Differentialforms in Mathematical Physics*“, North-Holland, 1978
- [20] S.Penrose in „*300 years of gravitation*“, S.W.Hawking und W.Israel (Hrsg.) Cambridge 1987
- [21] D.Ivanenko und G.Sardanashvily, Phys.Rep. **94**, 1 (1983)
- [22] C.W.Misner und J.A.Wheeler, Ann.Phys. **2**, 525 (1957)
- [23] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler: „*Gravitation*“, Freeman (1973)
- [24] T.Heck und M.Sorg: „*Geodesic motion in trivializable gauge fields*“, preprint 1989.
- [25] K.Iwasawa, Ann. of Math. **50**, 507 (1949)

- [26] J.Isenberg und J.Nester in „*General Relativity and Gravitation*“, Plenum Press 1980, S.23
- [27] P.D.B.Collins, A.D.Martin, E.J.Squires, „*Particle Physics and Cosmology*“, Wiley-Interscience Publications 1989
- [28] G.Mack, Fortschr.d.Physik **29**, 135, (1981)
- [29] S.Weinberg, „*Gravitation & Cosmology*“, New York, Wiley 1972
- [30] S.Weinberg, Rev.Mod.Phys **61**, 1, (1989)
- [31] S.Hawking und G.Ellis: „*The large scale structure of space-time*“ Cambridge University Press, 1973
- [32] W.Rindler, „*Essential Relativity*“, Springer (1977)
- [33] M.Mattes und M.Sorg, „*First-order field equations in General Relativity*“, II Nuovo Cimento **Vol. 106 B**, N. 3 (1991)
- [34] M.Mattes und M.Sorg, „*Riemann Cartan Geometry of Trivializable Gauge fields*“ Z. Naturforsch. **44a**, 222 (1989)
- [35] J.Trefl, „*Fünf Gründe, warum es die Welt nicht geben kann*“, Rowohlt Verlag GmbH, 1990
- [36] M.Mattes und M.Sorg, „*Oscillating and Inflating Universe in $SO(3)$ -Gravitation Theory*“ Z. Naturforsch. **46a**, 967 (1991)
- [37] M.Mattes und M.Sorg, „*Nonstandard Model of the Expanding Universe*“ Int. J. Theor. Phys. Vol. **31**, No. 7 1229 (1992)
- [38] M.Mattes, U.Ochs und M.Sorg, „*Matter Production in the Early Universe*“ Int. J. Theor. Phys. Vol. **35**, No. 1, pp. 155-170 (1996)

Herrn Dr. M.Sorg möchte ich an dieser Stelle für die Themenstellung und für seine ständige Gesprächsbereitschaft meinen besonderen Dank aussprechen. Viele anregende Diskussionen mit ihm trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c W.Weidlich danke ich für die Übernahme des Hauptberichts und Herrn Prof. Dr. H.R.Trebin für seine Bemühungen als Mitberichter.